المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)

يكون المتغير العشوائي X متغيرا عشوائيا متقطعا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له X(S) مجموعة متقطعة (أو قابلة للعد).

مثل: عدد الصور في تجربة رمي ثلاث عملات   عدد الحوادث التي تقع في شارع ما

<u>مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع X تأخذ إحدى الحالتين:</u>

$X(S)=\{x_1, x_2,\dots, x_n\}$ مجموعة قابلة للعد ومنتهية

$X(S)=\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ مجموعة قابلة للعد وغير منتهية

يتميز المتغير العشوائي بدالة كثافة احتمال، حيث : $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$

ودالة التوزيع التي تساعد في حساب الاحتمالات ، ومجموعة من المميزات العددية تتمثل في المتوسط والتباين والانحراف المعياري.

<u>مثال2:</u> نرمي قطعة نقود متوازنة مرتين متتاليتين نفرض أن X متحول عشوائي يمثل عدد الأوجه 'F' (Face)

1) حدد التوزيع الاحتمالي لـــ X.
2) حدد تابع التوزيع الاحتمالي لـــ X.

<u>الجواب :</u>

1) تحديد التوزيع الاحتمالي لـــ X : بداية تحدد القيم الممكنة لـــ X :

الجدول رقم 03: القيم الممكنة للمتغير X.

فضاء المعاينة	FF	FP	PF	PP
قيم X الممكنة.	2	1	1	0

وعليه يكون التوزيع الاحتمالي لـــ X كما يلي:

الجدول رقم 04: التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

x_i	0	1	2	المجموع
$P(x_i)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$	1

<u>المصدر</u>: معطيات المثال 02، والجدول رقم 03.

2) تحديد تابع التوزيع الاحتمالي لـــ X :

الجدول رقم 05: تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

x_i	$P(x_i)$	موقع x_k	$F(x_k)=P(X\leq x_k)$
0	$1/4$	$-\infty < x_k < 0$	0
1	$2/4$	$0 \leq x_k < 1$ .... [لا يظهر F]	$1/4$
2	$1/4$	$1 \leq x_k < 2$ ....[يظهر F مرة "أو" لا يظهر]	$3/4$
		$2 \leq x_k < +\infty$ [يظهر F مرتين "أو" مرة "أو" لا يظهر]	$4/4$
/	$4/4$	/	/

<u>المصدر</u>: معطيات المثال 02، والجدول رقم 04.

يمكن تمثيل تابع التوزيع الاحتمالي بيانيا.

تمرين رقم 03 :

ليكن لدينا الجدول الأتي الذي يمثل توزيعا احتماليا متقطعا للمتغير العشوائي X على النحو الأتي :

X	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	k	1/8

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. أوجد قيمة الثابت k التي تحقق التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟
2. أحسب التوقع الرياضي $E(x)$ والانحراف المعياري $\delta(x)$ ؟
3. أحسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Y ثم Z و M، حيث أن :

$$M = X * Y \quad ; \quad Z = X + Y \quad ; \quad Y = 2X + 1$$

تمرين رقم 03 :

ليكن لدينا الجدول الأتي الذي يمثل توزيعا احتماليا متقطعا للمتغير العشوائي X على النحو الأتي :

X	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	k	1/8

1. إيجاد قيمة الثابت k التي تحقق التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

$$\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1 \Rightarrow P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

بتعويض قيم الاحتمال نحصل على النتيجة التالية :

$$\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{8}\right) + k + \left(\frac{1}{8}\right) = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

بما أن $1 > k > 0$، فإن الجدول يعبر عن قانون الاحتمال .

2. أحسب التوقع الرياضي $E(x)$ والتباين$V(x)$: تعطى الصيغة الإحصائية لتوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي (X) بالشكل الأتي؛

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i) \times P(X = x_i) \right] \quad \& \quad V(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i)^2 \times P(X = x_i) \right] = E(x^2) - [E(x)]^2$$

– **الطريقة المباشرة (الجدولية)** : يتم ذلك على الجدول الأتي؛

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**المجموع**
$\mathbf{x_i}$	0	1	2	3	–
$\mathbf{P(x_i)}$	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$[(x_i)\times P(x_i)]$	0	3/8	6/8	3/8	12/8
$[(x_i)^2\times P(x_i)]$	0	3/8	12/8	9/8	24/8

ومنه فإن قيمة التوقع الرياضي للمتغير العشوائي (X) يقدر ب :1,5، أما التباين فيقدر ب : 0,75 .

– **الطريقة الحسابية** : بالتعويض في علاقة حساب المقياسين نحصل على النتيجة التالية ؛

*التوقع الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}[(x_i)\times P(X=x_i)]\mapsto E(x)=(0)\times\left(\frac{1}{8}\right)+(1)\times\left(\frac{3}{8}\right)+(2)\times\left(\frac{3}{8}\right)+(3)\times\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$\Rightarrow E(x)=1{,}5$$

*التباين $V(x)$:

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2\mapsto V(x)=\left[(0)^2\times\left(\frac{1}{8}\right)+(1)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)+(2)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)+(3)^2\times\left(\frac{1}{8}\right)\right]-(1{,}5)^2$$
$$V(x)=0{,}75$$

3. أحسب التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية Y ثم Z و M :

– **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Y** : تم تعريف هذا المتغير بالصيغة التالية ؛

$$Y=2X+1$$

لدينا من خواص التوقع الرياضي للقيمة الثابتة العبارة الأتي :

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

ومنه فإن ؛

$$E(Y)=E(2X+1)\mapsto E(Y)=2E(X)+1\Rightarrow E(Y)=2(1{,}5)+1$$
$$E(Y)=4$$

– **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Z** : تم تعريف هذا المتغير بالصيغة التالية ؛

$$Z=X+Y$$

لدينا من خواص التوقع الرياضي لجمع توقعين العبارة الأتي :

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

ومنه فإن ؛

$$E(Z)=(1{,}5)+(4)\Rightarrow E(Z)=5{,}5$$

– **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي M** : تم تعريف هذا المتغير بالصيغة التالية ؛

$$M=X*Y$$

لدينا من خواص التوقع الرياضي جداء توقعين العبارة الأتي :

$$E(X*Y)=E(X)*E(Y)$$

ومنه فإن ؛

$$E(M)=(1{,}5)*(4)\Rightarrow E(M)=6$$

المتغير العشوائي المتصل (المستمر)

يكون المتغير العشوائي X متغيرا عشوائيا مستمرا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له X(S) مجموعة مستمرة (أو غير قابلة للعد تكون في شكل مجال)

مثلا: $x \in [0, 10]$

مثل المتغيرات التي تقيس: الطول، والوزن، والمسافة، والزمن ... الخ

يتميز المتغير العشوائي بدالة كثافة احتمال، حيث : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ودالة التوزيع التي تساعد في حساب الاحتمالات، ومجموعة من المميزات العددية تتمثل في المتوسط والتباين والانحراف المعياري.

تمرين رقم 10 :

إذا كانت X متغيرا عشوائيا، ودالة كثافة الاحتمال له تأخذ الصيغة التالية؛

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le X \le 2 \\ 0 & Other\ Wise \end{cases}$$

المطلوب : حدد ما يلي؛

1. أرسم دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير ؛
2. أحسب التوقع الرياضي $E(x)$
3. الإنحراف المعياري $\delta(x)$ ؛
4. أوجد الاحتمالات التالية :

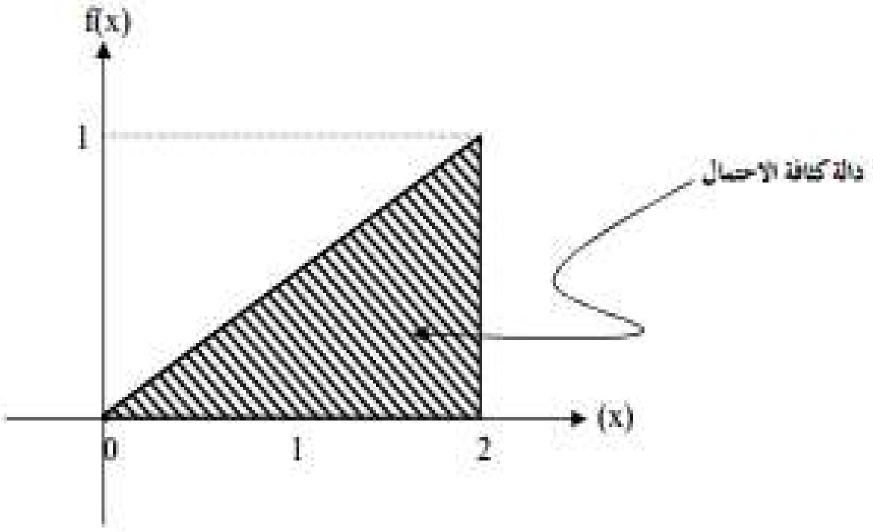
$$P(X<1); \quad P(X \ge 1); \quad P(1<X<2); \quad P(X=1).$$

تمرين رقم 10 :

لدينا X متغيرا عشوائيا، ودالة كثافة الاحتمال له تأخذ الصيغة التالية؛

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le X\le 2\\ 0 & Other\ Wise\end{cases}$$

1. تمثيل دالة كثافة الاحتمال



2. إيجاد قيمة التوقع الرياضي $E(x)$: تعطى علاقة حساب التوقع الرياضي بالصيغة التالية؛

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x.f(x)]dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$E(x)=\int_{-\infty}^{0}[x.f(x)]dx+\int_{0}^{2}[x.f(x)]dx+\int_{2}^{+\infty}[x.f(x)]dx \Leftrightarrow E(x)=0+\int_{0}^{2}(x)\left(\frac{1}{2}x\right)dx+0$$

$$E(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \Rightarrow E(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

ومنه فإن قيمة التوقع الرياضي تقدر بـ : 1,33 .

3. الإنحراف المعياري $\delta(x)$: تعطى علاقة حساب الإنحراف المعياري بالصيغة التالية؛

$$\left.\begin{aligned}\delta(x)&=\sqrt{V(x)}\\ V(x)&=E(x^2)-[E(x)]^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \delta(x)=\sqrt{E(x^2)-[E(x)]^2}$$

$$\delta(x)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}[x^2.f(x)]dx-[E(x)]^2}$$

ومنه لدينا :

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x^2.f(x)]dx \Leftrightarrow E(x^2)=0+\int_{0}^{2}[x^2.f(x)]dx+0$$

$$E(x^2)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 \Rightarrow E(x^2)=2$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$\delta(x)=\sqrt{E(x^2)-[E(x)]^2} \mapsto \delta(x)=\sqrt{(2)-\left(\frac{4}{3}\right)^2} \Rightarrow \delta(x)=\sqrt{\frac{2}{9}}=0,471$$

ومنه فإن قيمة الانحراف المعياري تقدر بـ : $0,471$.

4. إيجاد القيم الاحتمالات

1-4. قيمة احتمال $(X=1)$: بما أن احتمال القيمة الثابتة في المتغيرات العشوائي المستمرة يكون معدوم مهما تكن قيمة هذا الثابت، فإن ؛

$$P(X=1)=0$$

2-4. قيمة احتمال $(1<X<2)$

$$P(1<X<2)=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}x\right)dx \Leftrightarrow P(1<X<2)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \Rightarrow P(1<X<2)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4-1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

3-4. قيمة احتمال $(X<1)$

$$P(X<1)=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X<1)=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x)dx \Leftrightarrow P(X<1)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \Rightarrow P(X<1)=\frac{1}{4}$$

4-4. قيمة احتمال $(X\geq 1)$

$$P(X\geq 1)=\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{+\infty}f(x)dx \Leftrightarrow P(X\geq 1)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+0 \Rightarrow P(X\geq 1)=\frac{3}{4}$$

يمكن الحصول على نفس النتيجة، بالإعتماد على طريقة الاحتمال المتمم، حيث أن القاعدة تنص على أنه :

$$P(X\geq a)=1-P(X<a)$$

والاعتماد على هذه الصيغة نحصل على النتيجة الأتية :

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1) \mapsto P(X\geq 1)=\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow P(X\geq 1)=\frac{3}{4}$$