

بعض التوزيعات المستمرة المهمة في المجال الحيوي (التوزيع الطبيعي, مربع كاي ، F ، T)

1- التوزيع الطبيعي : Normal Distribution

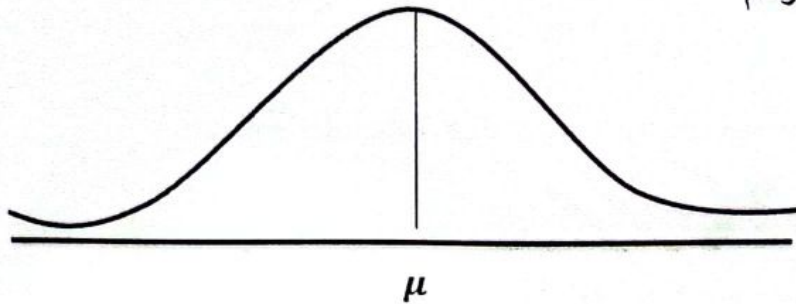
وهو التوزيع الاهم في مجال الاحصاء وان صيغة هذا التوزيع نشرت لأول مرة بواسطة العالم ابرهام عام 1935 وقد ساهم الكثير من الاحصائيين في تاريخ التوزيع الطبيعي ومن ضمنهم العالم Gauss والذي غالبا ما يدعى التوزيع بأسمه Gaussian dist. وان دالة التوزيع الطبيعي تكتب بالصيغة التالية :- σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty ; -\infty < \mu < \infty , \sigma^2 > 0$$

عدا ذلك o.w = 0

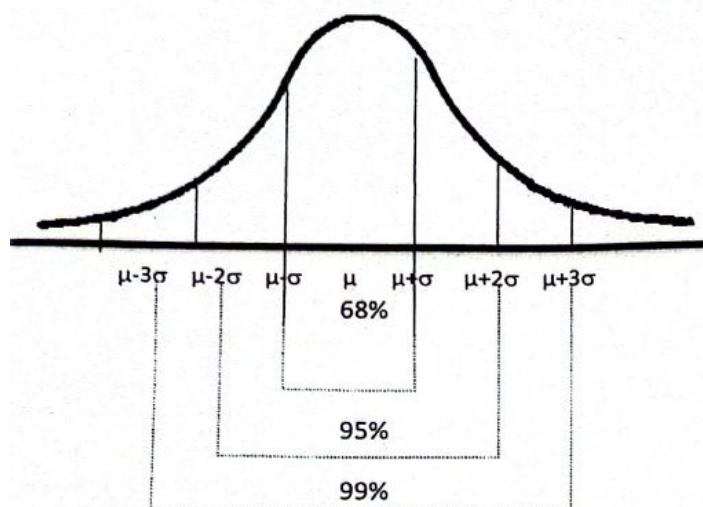
$$\pi = 3.14 , e = 2.178$$

ويأخذ شكل التوزيع الشكل الناقوسي في الرسم



خواص التوزيع الطبيعي :

- 1- شكله يشبه الجرس وعليه فهو متمائل حول العمود المقام على الوسط الحسابي μ
- 2- التوزيع الطبيعي له قيمة واحدة وهذا طبعا يعطينا استنتاج بان له منوال واحد يساوي μ ويساوي الوسيط ايضا .
- $$\mu = Mo = Me$$
- 3- يتقارب طرفا منحنى هذا التوزيع من الصفر عندما $X \sim -\infty$ و $X \sim +\infty$
- 4- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد .
- 5- من المساحة الكلية للتوزيع الطبيعي حسبت نسب معينة وفقا لعدد الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابي وكما في الشكل الموضح ادناه .
- عند البعد بانحراف معياري واحد (σ) تكون المساحة تحت المنحنى بنسبة 68% .
- عند البعد بانحراف معياري واحد (2σ) تكون المساحة تحت المنحنى بنسبة 95% .
- عند البعد بانحراف معياري واحد (3σ) تكون المساحة تحت المنحنى بنسبة 99% .
- 6- يتم تحديد التوزيع الطبيعي كليا بالمعلمات μ و σ^2



2- التوزيع الطبيعي القياسي Standard Normal distribution

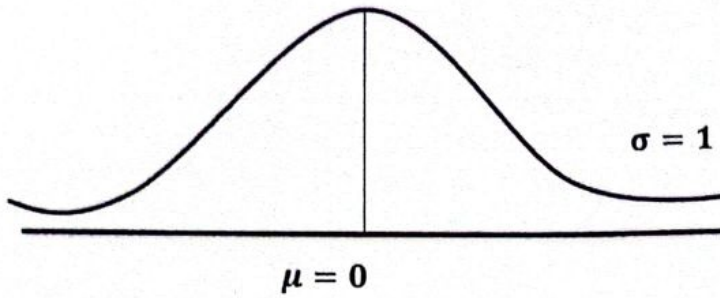
هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي يساوي صفر وتباينه يساوي واحد ($\sigma^2 = 1, \mu = 0$)، فلو اسميننا المتغير Z على انه متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) فهذا يدل على انه توزيع المتغير Z هو التوزيع الطبيعي الذي معدله يساوي صفر وتباينه يساوي واحد ($\sigma^2 = 1, \mu = 0$) اي ان المعادلة او دالة التوزيع الطبيعي القياسي يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad -\infty < Z < \infty$$

ويمكن الاعتماد على النظرية التي تقول اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي بوسط μ وتباين σ^2 فان توزيع المتغير العشوائي $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ هو التوزيع الطبيعي القياسي بمعنى توزيع طبيعي بوسط حسابي صفر وتباين واحد.

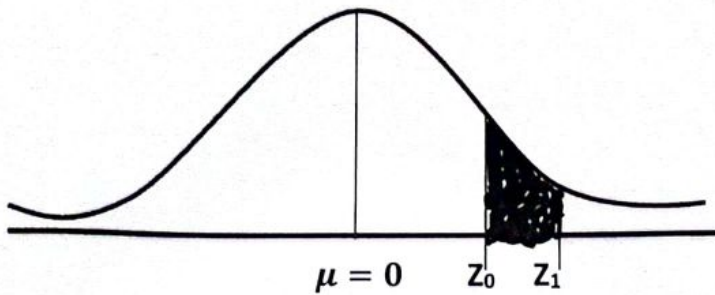
ونلاحظ ان هنا ان كل قيمة من قيم x يقابلها قيمة من قيم z حسب ما تم تعريفه اعلاه وتسمى قيم z القيم المعيارية او القياسية المقابلة لقيم x .

ويمكن ان يمثل التوزيع الطبيعي القياسي بالشكل التالي :



وان المساحة تحت المنحنى بين Z_0 و Z_1 يتم استخراجها باستخدام التكامل

$$\int_{Z_0}^{Z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot dz$$



ملاحظة : هناك جداول خاصة لحساب هذا التكامل وهو جدول التوزيع الطبيعي

ملاحظة :

1- الصيغة المعتمدة في ايجاد قيمة الاحتمال $P(Z < a)$

2- $P(Z \geq a) = 1 - p(Z < a)$

3- $P(Z < -a) = 1 - p(Z < a)$

4- $P(Z > -a) = 1 - p(Z < -a)$

$$= 1 - [1 - p(Z < a)] = P(Z < a)$$

مثال : اذا كان x متغير عشوائي (يمثل اوزان الطلبة) له توزيع طبيعي

بمعدل $\mu = 62$ وتباين $\sigma^2 = 36$ ،

المطلوب // 1- حول المتغير x الى متغير طبيعي قياسي 2- اوجد القيم المعيارية المقابلة للقيم

$$X_3 = 70 , X_2 = 54 , X_1 = 64$$

// الحل

1- حسب النظرية فان Z هو المتغير العشوائي الذي توزيعه هو التوزيع الطبيعي القياسي ويكتب :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 62}{6}$$

2- القيم المعيارية او القياسية المقابلة لقيم X تحسب كالآتي :

• القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $X_1 = 64$ هي :

$$Z_1 = \frac{64-62}{6} = \frac{2}{6} = 0.33$$

• القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $X_2 = 54$ هي :

$$Z_2 = \frac{54-62}{6} = \frac{-8}{6} = -1.33$$

• القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $X_3 = 70$ هي :

$$Z_3 = \frac{70-62}{6} = \frac{8}{6} = 1.33$$

ملاحظة :

X يخضع لتوزيع طبيعي بوسط μ وتباين σ^2 ويمكن التعبير عنه بـ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Z يخضع لتوزيع طبيعي قياسي فيعبر عنه بـ $Z \sim N(0, 1)$

أمثلة //

مثال (1) : إذا علمت ان المتغير Z له التوزيع الآتي : $Z \sim N(0, 1)$

فأوجد $p(Z < 1.34)$ والتي تعني احتمال Z اقل من 1.34 او نسبة المساحة لـ $Z < 1.34$

من الجدول الخاص نجد ان $p(Z < 1.34) = 0.90900$

مثال (2) : جد احتمال $p(Z > 1.22)$

$$P(Z > 1.22) = 1 - P(Z \leq 1.22)$$

ومن الجدول الخاص نجد ان $P(Z \leq 1.22) = 0.8888$ لذا فإن

$$P(Z > 1.22) = 1 - 0.8888 = 0.1112$$

مثال (3) : إذا علمت ان $Z \sim N(0, 1)$ فاحسب $P(1.3 < Z < 2.4)$

$$P(1.3 < Z < 2.4) = P(Z < 2.4) - P(Z < 1.3) \quad \text{الحل :}$$

ومن الجدول الخاص نجد ان $P(Z < 1.3) = 0.9032$ و $P(Z < 2.4) = 0.9918$ لذا فإن

$$P(1.3 < Z < 2.4) = P(Z < 2.4) - P(Z < 1.3) \\ = 0.9918 - 0.9032 = 0.0886$$

مثال (4) : إذا علمت ان $Z \sim N(0, 1)$ فاحسب $P(Z < -1.94)$

$$P(Z < -1.94) = 1 - P(Z < 1.94)$$

ومن الجدول الخاص نجد ان $P(Z < 1.94) = 0.9738$ وبالتعويض نحصل على

$$P(Z < -1.94) = 1 - 0.9738 = 0.0262$$

مثال (5) : إذا علمت ان $Z \sim N(0, 1)$ فاحسب $P(Z > -1.82)$

$$P(Z > -1.82) = 1 - P(Z < -1.82)$$

$$= 1 - [1 - P(Z < 1.82)] = P(Z < 1.82)$$

ومن الجدول الخاص نجد أن $P(Z < 1.82) = 0.9656$

مثال (6) : إذا علمت أن $Z \sim N(0, 1)$ فاحسب ما يلي :

1- $P(0 < Z < 2)$

2- $P(-2.55 < Z < 2.55)$

3- $P(-2.74 < Z < 1.53)$

4- $P(Z > 2.71)$

5- $P(0.84 < Z < 2.45)$



مثال 7 : افترض أن هناك أوزان لمجموعة من الطلاب تتوزع توزيع طبيعي بوسط (140) وانحراف معياري (25) فإذا تم أخذ شخص عشوائياً من هذه المجموعة فمت هو احتمال :

- 1- أن يكون وزنه بين 100 و 160 كغم .
- 2- أن يكون وزنه أقل من 160 كغم .
- 3- أن يكون وزنه أكثر من 180 كغم .
- 4- إذا افترضنا بأن هذه المجموعة هي 40 شخص ما هو عدد الأشخاص الذين يملكون وزن أقل من 170 كغم .

الحل :

نفرض أن أوزان هذه المجموعة هي متغير عشوائي X بحيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} 1- P(100 < X < 160) &= P\left(\frac{100-140}{25} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-140}{25}\right) = P(-1.6 < Z < 0.8) \\ &= P(Z < 0.8) - P(Z < -1.6) = P(Z < 0.8) - [1 - P(Z < 1.6)] \\ &= 0.7881 - [1 - 0.9452] = 0.733 \end{aligned}$$

$$2- P(X < 160) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-140}{25}\right) = P(Z < 0.8) = 0.7881$$

$$\begin{aligned} 3- P(X > 180) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{180-140}{25}\right) = P(Z > 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6) \\ &= 1 - 0.9452 = 0.0548 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4- P(X < 170) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{170-140}{25}\right) = P(Z < 1.2) \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

شخص وزنهم أقل من 170 كغم $n * p(z < 170) = (40)(0.8849) = 35.39 \cong 35$

جدول التوزيع الطبيعي

تابع التوزيع للقانون الطبيعي المعياري

Z z u

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0,7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2,0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3,0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3,1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3,2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3,3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3,4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998

3,5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3,6	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	5	5	6	6	6	6	6	6	7	0.99997