السنة الثانية علوم اقتصادية

جامعة عنابة

كلية العلوم الاقتصادية والتيسير

مقياس احصاء 03.

سلسلة 2 (توزيع المعاينة للوسط الحسابي)

التمرين الأول:

1- لماذا يلجأ الباحث إلى أسلوب المعاينة في الدراسات الميدانية؟

2- ماذا تمثل كل من: n، N، $\bar{X}$، μ، σ^2، S^2 مع إعطاء الصيغ الرياضية لها (n، N غير معينة).

التمرين الثاني:

ليكن لدينا مجتمع يتكون من 3 مفردات هي:

$\Omega = \{2, 4, 6\}$ ، $N = 3$

قمنا بسحب جميع العينات الممكنة من مفردتين $n = 2$

1- أحسب المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) للمجتمع.

2- حدد العينات الممكنة في السحب بإرجاع (مجتمع غير منته).

3- أوجد توزيع المعاينة للمتوسطات، ثم أحسب المتوسط الحسابي $\mu_{\bar{x}}$ والانحراف المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات.

4- اختبر العلاقتين التاليتين: $\mu_{\bar{x}} = \mu$ ، $\sigma_{\bar{x}}^* = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

5- نفس السؤال (2، 3، 4) في حالة السحب بدون إرجاع (مجتمع منته)

التمرين الثالث:

لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي لمتوسط حسابي 150 وتباين حسابي 100 و $N = 200$

1- حدد طبيعة توزيع الوسط للمعاينة.

2- أوجد المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة في حالة $n = 40$.

3- أحسب احتمال أن يكون $\bar{x}$ محصورا بين (155 - 165).

التمرين الرابع:

إذا كان لدينا $X \rightsquigarrow N(7, \sigma^2)$ 1- ما التوزيع الاحتمالي لمتوسط عينة عشوائية بحجم $n = 36$، ذات تباين $S^2 = 9$ 2- أحسب $P(\bar{X} > 8)$

التمرين الخامس:

إذا كان لدينا $X \rightsquigarrow N(8, \sigma^2)$ 1- أوجد التوزيع الاحتمالي لمتوسط عينة عشوائية بحجم $n = 10$، بتباين $S^2 = 2$. 2- أحسب: $P(7 < \bar{x} < 10)$.

د. عجمي سارة.

Scanné avec CamScanner

حل السلسلة 02 :

التمرين الثاني :

1- حساب μ و σ^2 :

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+4+6}{3} = \boxed{4}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{N} = \frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \boxed{\sqrt{\frac{8}{3}}}$$

2- تحديد العينات في حالة مجتمع غير منته :

$$N^n = 3^2 = 9$$

$(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)$. $\boxed{n_w = 9}$

3- تحديد توزيع المعاينة المتوسطات .

أولا نقوم بحساب المتوسط الحسابي $\bar{x}$ لكل عينة من العينات نجد :

$\bar{x}_i = 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6$, $\sum \bar{x}_i = 36$

ثانيا : نحسب $\mu_{\bar{x}}$ (متوسط المعاينة الوسط) :

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{n_w} = \frac{36}{9} = \boxed{4}$$

نحسب الانحراف المعياري $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2}{n_w} = \frac{(2-4)^2+(3-4)^2+\dots+(6-4)^2}{9}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

توزيع المعاينة $= \boxed{\bar{X} \rightsquigarrow N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}^2)}$

$$\boxed{\bar{X} \rightsquigarrow N\left(4, \frac{4}{3}\right)}$$

4) نختبر العلاقتين :

a) $\mu_{\bar{x}} = \mu = 4$. العلاقة محققة

b) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$ العلاقة محققة

5) نفس الأسئلة في حالة السحب بدون إرجاع (مجتمع منته)

تحديد العينات :

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3\times 2\times 1}{2\times 1} = 3$$

العينات الممكنة هي : $(2,4),(2,6),(4,6)$; $\boxed{n_w = 3}$

حساب $\mu_{\bar{x}}$:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{n_w} = \frac{3+4+5}{3} = \boxed{4}$$

حساب $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{n_w} = \frac{(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2}{3}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

التوزيع للمعاينة : $\boxed{\bar{X} \rightsquigarrow N\left(4, \frac{2}{3}\right)}$

نختبر العلاقتين :

a) $\mu_{\bar{x}} = \mu = 4$ محققة

b) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$

العلاقة غير محققة وبالتالي وجب إضافة معامل الإرجاع $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3-2}{3-1}}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$ بعد التبسيط .

العلاقة محققة .

Scanné avec CamScanner

التمرين الأول:

1- يلجأ الباحث إلى أسلوب المعاينة لتقليل من الوقت، الجهد، والتكلفة، و نظرا لكون عملية المسح الكلي أحيانا مستحيلة.

2-

المجتمع	العينة
حجم المجتمع N	حجم العينة n
تباين المجتمع $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - M)^2}{N}$	تباين العينة $S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
متوسط المجتمع $M = \frac{\sum x_i}{N}$	متوسط العينة $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

التمرين الثالث:

لدينا $X \rightsquigarrow N(150, 100)$

$N = 200$
$M = 150$
$\sigma^2 = 100$
$n = 40$

1- توزيع المعاينة للوسط:

$$\bar{X} \rightsquigarrow N(M_{\bar{x}}, \sigma^2_{\bar{x}})$$

في حالة $n = 40$ نحسب معامل الاستقصاء $\frac{n}{N}$ لتحدد طبيعة المعاينة (تقاذية أو غير تقاذية) (طبيعة المجتمع (منتهي أو غير منتهي)).

$\frac{n}{N} = \frac{40}{200} = 0,2 > 0,05$

إذن المجتمع منتهي يجب إضافة معامل الترجيح.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{10}{\sqrt{40}} \cdot \sqrt{\frac{200-40}{200-1}} = 1,41$$

إذن نكتب توزيع المعاينة للوسط:

$$\bar{X} \rightsquigarrow N(150, 1,41) \quad / M_{\bar{x}} = M = 150$$

2- حساب: $P(155 < \bar{X} < 165)$

لما أن المجتمع طبيعي
تباين المجتمع σ^2 معلوم.
$n = 40 > 30$ فإننا بصدد الحالة 1.

$$P\left(\frac{\bar{x} - M_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} < Z < \frac{\bar{x} - M_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{155 - 150}{1,41} < Z < \frac{165 - 150}{1,41}\right)$$

$$= P(-3,57 < Z < 3,57)$$

$$= P(Z < 3,57) - [1 - P(Z < 3,57)]$$

$$= 2\Phi(3,57) - 1 = 2(0,9998) - 1$$

$$P(155 < \bar{x} < 165) = \boxed{0,9996}$$

التمرين الرابع:

لدينا: مجتمع طبيعي
σ^2 مجهول
$n = 36 > 30$

الحالة 2.

1- التوزيع الاحتمالي لمعاينة الوسط:

$$\bar{X} \rightsquigarrow N(M_{\bar{x}}, \frac{S^2}{n}) \rightsquigarrow N(7, \frac{9}{36})$$

حساب الاحتمال:

$$P(\bar{X} > 8) = P\left(Z > \frac{\bar{x} - M}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P(Z > 2) = 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0,97725$$

$$P(\bar{x} > 8) = \boxed{0,0225}$$

Scanné avec CamScanner

التمرين الخامس:

لدينا مجتمع طبعي. N مجهول
تباين المجتمع σ^2 مجهول.
$n = 10 < 30$

الحالة ③

1- التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}$:

$$t \rightsquigarrow N\left(M, \frac{S^2}{n}\right)$$

$$t \rightsquigarrow N\left(8, \frac{2}{10}\right) \quad / \quad \boxed{t = \frac{\bar{X} - M}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - 8}{0,447} \rightsquigarrow t(9)}$$

2- حساب $P(7 < \bar{X} < 10)$

$$P(7 < \bar{X} < 10) = P\left(\frac{7-8}{0,447} < t < \frac{10-8}{0,447}\right)$$

$$= P(-2,237 < t < 4,474)$$

$$= P(t < 4,474) - [1 - P(t < 2,237)]$$

نلاحظ من جدول القيم الحرجة لـ (t, student) بأن:

$P(t(9) < 4,474)$ وهي قريبة من $P(t(9) < 4,781) = 0,999$

$P(t(9) < 2,237)$ وهي قريبة من $P(t(9) < 2,262) = 0,975$

إذن بالتقريب نجد أن:

$$P(7 < \bar{X} < 10) = 0,999 - (1 - 0,975) = \boxed{0,974}$$

زملائي: بالنسبة للتمرين 2، لقد حللت التمرين بالنسبة الحالة الأولى (السحب بالإرجاع) فما عليكم سوى أن تكملوا الحالة الثانية (السحب بدون إرجاع) وهي فرصة للطلبة بأن يحضروا المحاضرة.

بالنسبة لجداول الإحصائية Z، t، χ^2 فهي مرفقة مع السلسلة والحل.

وقد جمعت القوانين الخاصة بالمحاضرة مع السميات في ورقة واحدة.

Scanné avec CamScanner

قوانين توزيع العاينة للمتوسط

حالة 1

مجتمع طبيعي
$n \geq 30$
S^2 معلوم

بالإرجاع

$\frac{n}{N} \leq 0,05$

$E(\bar{x}) = M_{\bar{x}} = M$

$S^2_{\bar{x}} = \frac{S^2}{n}$

$\bar{x} \rightsquigarrow N(M, S^2/n)$

$z = \frac{\bar{x} - M}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0,1)$

(مجتمع غير منتهي)

بدون إرجاع

$\frac{n}{N} > 0,05$

$E(\bar{x}) = M_{\bar{x}} = M$

$S^2_{\bar{x}} = \frac{S^2}{n} \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(M, \frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$

$z = \frac{\bar{x} - M}{S/\sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$ (مجتمع منتهي)

حالة 2

مجتمع مجهول
$n \geq 30$
S مجهول

$E(\bar{x}) = M_{\bar{x}} = M$

$S^2_{\bar{x}} = \frac{S^2}{n}$

$\bar{x} \rightsquigarrow N(M, S^2/n)$

$z = \frac{\bar{x} - M}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0,1)$

مجتمع غير منتهي

$E(\bar{x}) = M_{\bar{x}} = M$

$S^2_{\bar{x}} = \frac{S^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(M, \frac{S^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}\right)$

$z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \rightsquigarrow N(0,1)$

مجتمع منتهي

حالة 3

مجتمع طبيعي
$n < 30$
S^2 مجهول

$E(\bar{x}) = M_{\bar{x}} = M$

$S^2_{\bar{x}} = \frac{S^2}{n}$

$\bar{x} \rightsquigarrow N(M, S^2/n)$

$t = \frac{\bar{x} - M}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$

مجتمع غير منتهي

$t = \frac{\bar{x} - M}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \rightsquigarrow t(n-1)$

مجتمع منتهي

t : توزيع t ستودنت
درجات الحرية تتعلق على
قراءة جدول القيم الحرجة

بالنسبة للتباين هناك رمزين S^2 و σ^2
الرجاء استخدام σ^2 حتى نفرق
بينه وبين S^2 للعينة
أو التفسير أنها موجودة

الرموز:
M : متوسط المجتمع mii
σ^2 : تباين المجتمع sigma
ω : المجهولة الكلية omega
$N(M, \sigma^2)$: التوزيع العلمي
$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري

Scanné avec CamScanner