جامعة زيان عاشور الجـلفة
Université Ziane Achour DJELFA
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
Faculté des Sciences Economiques commerciales et des Sciences de Gestion

قسم العلوم التجارية
تخصص مالية وتجارة دولية

سنة أولى ماستر

مقياس: النماذج القياسية في التجارة الدولية

جامعة زيان عاشور بالجلفة
المجلس العلمي
للكلية

عنوان المطبوعة:

محاضرات في النماذج القياسية في التجارة الدولية

مطبوعة علمية متخصصة موجهة لطلبة السنة الأولى ماستر مالية وتجارة دولية

من إعداد الأستاذ

حاشي نوري

السنة الجامعية: 2021/2020

جامعة زيان عاشور بالجلفة
المجلس العلمي
للكليـــة
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير

المحتويات	الصفحة
تمهيد	أ
الفصل الأول: مقدمة	
1- ماهية الاقتصاد القياسي	02
2- أهداف الاقتصاد القياسي	04
3- منهجية البحث في الاقتصاد القياسي	05
4- علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى	08
الفصل الثاني : الانحدار الخطي البسيط	
1.2 تمهيـــد	11
2.2 عرض النموذج	11
3.2 فرضياته	12
4.2 تقدير معالم نموذج	13
5.2 خصائص مقدرات المربعات الصغرى :نظرية Gauss-MarKov	15
6.2 قياس جودة التوفيق النموذج	22
7.2 اختبار الفرضيات	26
8.2 التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار	31
9.2 مثـــال تطبيـــــقي01	31
10.2 مثـــال تطبيـــــقي02	38

المجلس العلمي للكلية

11.2 الأسئـــــلة والتمـــــارين	45
الفصل الثالث : الانحدار الخطي المتعدد	
1.3 تمهيـــد	54
2.3 عرض نموذج الإنحدار الخطي المتعدد	54
3.3 الفرضيات التي يقوم عليها نموذج الإنحدار الخطي المتعدد	56
4.3 تقدير شعاع المعالم $\hat{\beta}$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)	57
5.3 الخصائص الإحصائية للمعالم المقدرة	59
6.3 اختبار جودة التوفيق والارتباط	61
7.3 اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد	65
8.3 التنبؤ باستعمال الانحدار الخطي المتعدد	67
09.3 مثـــــال تطبيـــــقي 03	68
10.3 الأسئـــــلة والتمـــــارين	77
الفصل الرابع : مدخل لتحليل السلاسل الزمنية	
1.4 تمهيـــد	82
2.4 تعريف السلسلة الزمنية	82
3.4 التمثيل البياني للسلسلة الزمنية	83
4.4 الهدف من دراسة السلاسل الزمنية	84
5.4 مركبات السلسلة الزمنية	84

المجلس العلمي للكلية

8.4 الأسئـــــلة والتمـــارين	87
7.4 اختبارات الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية	92
الفصل الخامس : استخدام برنامج EVIEWS	
1.5 تمهيـــد	96
2.5 انشاء ملف في برنامج EVIEWS	97
3.5 إدخال البيانات في برنامج EVIEWS	99
4.5 كيفية رسم منحنى لسلسة زمنية في برنامج EVIEWS	101
5.5 تقدير نموذج الانحدار الخطي في برنامج EVIEWS	102
5.6 الأسئـــــلة والتمـــارين	104
قائمة المراجع	108

تمهيد :

تعتبر الأساليب والطرق الكمية من أدوات التحليل الرئيسية والهامة في البحوث والدراسات خاصة في مجال العلوم الاقتصادية، فهي تساعدنا على تحليل وفهم الظاهرة المدروسة، كما تكمن أهميتها أيضا من خلال استخلاص النتائج في اتخاذ القرارات المناسبة سواء كان هذا على المستوى الكلي أو الوطني أو على المستوى الجزئي الأفراد والمؤسسات، وعلى الأساس نجد أن الأساليب الكمية تطبق في أغلب المجالات كمجال التجارة والصناعة وإدارة المستشفيات والقطاع العام والخاص... إلخ. وللأساليب والطرق الكمية أهمية بالغة في الدراسات الحديثة ومعالجة المواضيع في مجال العلوم التجارية والتسويق ونجد أهم هذه الطرق أو المناهج منهجية الاقتصاد القياسي، وهي أهم الطرق الكمية استعمالا.

الفصـل الأول

مقدمة

الفصل الأول : مقدمة

1-تعريف الاقتصاد القياسي:

استخدام مصطلح الاقتصاد القياسي لأول مرة سنة 1926 من طرف الاقتصادي النرويجي RagnarA.K.Frisch الحائز على جائزة نوبل في الاقتصاد. يعني الاقتصاد القياسي بالمعنى المختصر "القياس الاقتصادي" وعلى الرغم من أن القياس هو جزء مهم من الاقتصاد القياسي إلا أن نطاق هذا الأخير هو أوسع من ذلك بكثير.

يتكون الإسم الاصطلاحي العلمي للاقتصاد القياسي econometrics أصلهما إغريقي economy وتعني اقتصاد و metric ومعناها قياس، وينظر إلى الاقتصاد القياسي بأنه مزيج أو توليفة من النظرية الإقتصادية والإحصاء الرياضي حيث يستخدم في تحليل وتفسير الظواهر الاقتصادية واختبار بعض النظريات الاقتصادية وهذا انطلاقا من المعلومات الميدانية والواقعية الخاصة بالظاهرة المدروسة حيث يتم الحصول على مقدرات كمية تساعد على استنباط استنتاجات مهمة في إطار دراسة هذه الظواهر.

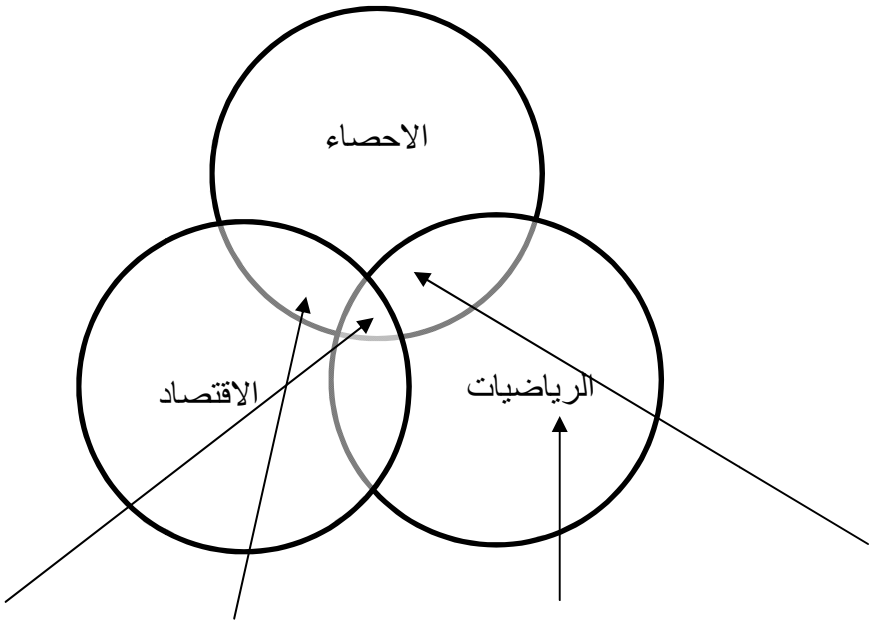
ويعرف علم الاقتصاد القياسي بأنه العلم الذي يدرس العلاقات الاقتصادية بأسلوب كمي مستخدما النظرية الاقتصادية والأسلوب الإحصائي أي الأدوات الرياضية للحصول على قيم رقمية لمعلمات المتغيرات التي تعبر عن العلاقات الاقتصادية.

يعرف الاقتصاد القياسي على أنه القياس في الاقتصاد أو بأنه فرع المعرفة الذي يهتم بقياس العلاقات القياسية من خلال بيانات واقعية، بغرض اختبار مدى صحة هذه العلاقات كما تقدمها النظرية الاقتصادية أو تفسير بعض الظواهر أو رسم بعض السياسات والتنبؤ بسلوك بعض المتغيرات الاقتصادية ، أو أنه فرع من فروع الاقتصاد يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الواقعية المبنية على أساس التماسك بين النظرية والمشاهدة متخذا بذلك أساليب الاستقراء الملائمة.

كما عرف Samuelson, Koopmansو Stone (1954) الاقتصاد القياسي على انه التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الحالية على أساس التماسك بين النظرية والملاحظة معتمدا في ذلك على الأساليب المناسبة للاستدلال.

وحسب Arthur S.Goldberger(1964) يمثل الاقتصاد القياسي احد فروع العلوم الاجتماعية والذي يطبق أدوات النظرية الاقتصادية ، الرياضيات والاستدلال الإحصائي لتحليل الظواهر الاقتصادية.

و من جهة أخرى اعتبر H.Theil (1971) الاقتصاد القياسي على انه يتعلق بالفحص أو التحديد التجريبي للقوانين الاقتصادية، حيث تشير كلمة تجريبي Empircal إلى أن البيانات المستخدمة في هذا التحديد قد تم الحصول عليها من الملاحظة.



الإحصاء الرياضي الاقتصاد الرياضي الإحصاء الاقتصادي الاقتصاد القياسي

و يمكن أن نميز بين:

أ* **الاقتصاد القياسي النظري :** والذي يهتم بدراسة و تطوير الطرق و الأساليب الإحصائية الخاصة بقياس العلاقات الاقتصادية التي يتضمنها النموذج الاقتصادي القياسي، ومن بين هذه الطرق نذكر على سبيل المثال طريقة المربعات الصغرى، كما أنه يناقش الافتراضات التي تقوم عليها هذه الطرق، وخصائصها الإحصائية ومشاكلها القياسية ، هذا بالإضافة إلى وسائل علاج هذه المشاكل.

ب* **الاقتصاد القياسي التطبيقي :** و الذي يختص بتطبيق الطرق القياسية النظرية في مجال معين من مجالات النظرية الاقتصادية مثل الطلب، العرض، الإنتاج والاستهلاك وغيرها، و لعل الهدف من ذلك هو قياس العلاقات الاقتصادية في الواقع واختبار مدى التوافق بين النظرية والواقع، بالإضافة إلى التنبؤات الخاصة بتطور الظاهرة الاقتصادية في المستقبل.

و ما يمكن الإشارة إليه أن احتواء الاقتصاد القياسي على هذين الفرعين لا يعني أن هناك فصلا تاما بينهما، فالاقتصاد القياسي التطبيقي يستخدم طرق القياس التي يتضمنها الاقتصاد القياسي النظري، وهذا في كثير من الأحيان يساعد على الوصول إلى طرق قياس جديدة للتغلب على بعض المشاكل التي تواجه طرق قياس الاقتصاد القياسي النظري.

2-أهداف الاقتصاد القياسي:

لكل علم أهداف معرفية نظرية وتطبيقية، وللاقتصاد القياسي ثلاث أهداف رئيسية نوجزها فيما يلي:

- **التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية:** يقوم الاقتصاد القياسي على إيجاد القيم العددية لمعلمات المتغيرات الاقتصادية التي تساعد متخذي القرار في رسم السياسات والتنبؤ عن اتجاهات هذه المتغيرات مستقبلا.
- **اختبار النظرية الاقتصادية:** يعتبر الاقتصاد القياسي اختبار للنظرية الاقتصادية، حيث قام الاقتصاديون ببنائها على مجموعة من الفرضيات وتم استخدام فيها السببية والتحليل المنطقي لدعم نظرياتهم وإثباتها من واقع الظواهر الاقتصادية المدروسة، وبدون محاولة اختبار صحة تلك النظريات واتساقها، لهذا يهدف الاقتصاد القياسي إلى اختبار مدى صحة تلك النظرية عن طريق التقييم والتحليل للوصول إلى قيم عددية لاختبار قوة المتغير المستقل في تأثيره على سلوكية المتغير التابع.
- **اتخاذ القرارات ورسم السياسات:** يساهم الاقتصاد القياسي برسم السياسات واتخاذ القرارات عن طريق الحصول على قيم عددية لمعلمات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات لتساعد رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات الحالية من حيث توفيره لصيغ وأساليب مختلفة لتقدير قيم تلك المعلمات التي تساعد في عملية المقارنات، واتخاذ القرار المناسب.

و تجدر الإشارة أن هذه الأهداف ليست بالضرورة مكملة لبعضها، ولكن الباحث القياسي في دراسته التطبيقية عليه أن يعمل على دمج أو التوفيق بين هذه الأهداف.

3- منهجية الاقتصاد القياسي:

يهتم الاقتصاد القياسي بقياس معلمات النموذج المستخدم في التقدير والتنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية، وهذا يتطلب إتباع منهجية معينة في البحث، لأن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية سببية أي بمعنى أن التغير في بعض المتغيرات يحدث أثرًا في المتغيرات الأخرى، ويمكن تحديد هذه المنهجية بالخطوات التالية :

أولا-مرحلة تعيين النموذج:

تعد مرحلة صياغة النموذج من أهم مراحل بناء النموذج وأصعبها، وذلك من خلال ما تتطلبه من تحديد للمتغيرات التي يجب أن يشتمل عليها النموذج أو التي يجب استبعادها منه، ويتم صياغة النموذج انطلاقاً من الفرضيات التي توفرها النظرية الاقتصادية عن العوامل التي تتحكم في الظاهرة وعلاقات التأثير فيما بينها (المستقل والتابع).

بعد ذلك تحدد العلاقة الرياضية التي تربط بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة في شكل علاقة دالية عامة أو معادلة أو مجموعة معادلات $y = f\ (x_1 x_2 \dots x_n\ )$، بحيث يرمز لكل عنصر أو عامل بمتغير، وبهدف تحديد أنسب الصيغ الرياضية التي تعبر عن هذه العلاقة بين هذه المتغيرات تعبيرًا دقيقًا (خطية أو غير خطية، بسيطة أو متعددة) يجب إتباع الخطوات التالية:

- إجراء تحليل تمهيدي بتعريف الظاهرة الناتجة أو المفسرة y، ثم تحديد العوامل المؤثرة فيها (الظواهر المفسرة أو المسببة)، مع تحديد وحدات القياس التي يقاس بها تلك الظاهرة وكل العوامل المؤثرة فيها على حدا.
- التأكد من أن هناك علاقة جدلية واضحة بين الظاهرة المدروسة والعوامل المؤثرة فيها.
- جمع المعومات الأولية مثل جمع المعطيات عن كل العوامل المرتبطة بالظاهرة المدروسة بواسطة إجراء القياسات اللازمة لكل منهم مع مراعاة أن تكون القيم متقابلة مع بعضها البعض من حيث المكان والزمان، ثم نقوم بترتيب هذه المعلومات في جدول خاص.
- التعرف على الشكل البياني الحقيقي للعلاقة محل الدراسة ويتم ذلك بواسطة الرسم البياني للمعطيات المتعلقة بالمتغير التابع وكل متغير مستقل على حدا، عن طريق إسقاط أزواج المتغيرات على إحداثيات معينة ورسم الشكل الانتشاري الذي يمكن أن يؤكد لنا وجود علاقة بين المتغيرات أو عدم وجودها، والقوة التقديرية لهذه العلاقة وبناء النموذج الاقتصادي على ضوئها.

- اختيار أنسب الصيغ الرياضية التي تتلاءم مع الشكل الانتشاري فقد تكون العلاقة خطية أو غير خطية، في شكل معادلة من الدرجة الثانية أو ثالثة، معادلة واحدة أو عدة معادلات.

بعد استكمال تحديد النموذج الرياضي، يتم إدخال المتغير العشوائيu_i، لتقدير الأخطاء المعيارية للمعادلة ولصياغة النموذج القياسي.

ثانيا– مرحلة تقدير معلمات النموذج:

يتم في هذه المرحلة معالجة المعلومات المتوفرة عن المجتمع والعينة رياضيًا وإحصائيًا لاستخراج قيم المعلمات والمتغير العشوائي والتي تتفق منطقيًا مع الفروض الاقتصادية ومنها نحصل على الصياغة الرقمية للنموذج باستخدام عدة تقنيات بحيث تكون مناسبة للنموذج.

تتكون هذه المرحلة من خطوات التالية :

أ) تجميع البيانات:

يتم تجميع البيانات عن المتغيرات التي يحتويها النموذج وهنا نجد عدة أنواع من البيانات، فقد تكون بيانات على شكل سلاسل زمنية تعطي قيم المتغيرات في فترات زمنية متتالية، أو بيانات مقطعية تعطي قيم معلومات عن المتغيرات الاقتصادية المتعلقة بوحدات اقتصادية مختلفة في نقطة زمنية معينة أو قد تكون بيانات مقطعية زمنية(سلسلة مقطعية) تحتوي على بيانات السلسلة الزمنية وعلى البيانات المقطعية في نفس الوقت، إضافة إلى وجود بيانات أخرى، أين توجد بعض المتغيرات النوعية التي تؤثر على المتغير التابع ويتم تكميمها بإعطائها قيماً عددية عادة ما تكون الصفر أو الواحد الصحيح وتعرف بالمتغيرات الصورية أو ما يسمى بالمتغيرات الصماء.

ب) اختيار طريقة القياس المناسبة :

تتعدد الطرق القياسية التي يمكن استخدامها في قياس العلاقات الاقتصادية، ومن بين تلك الطرق:

- طريقة المربعات الصغرى وهي أشهر طريقة والأكثر استعمالاً؛
- طريقة الأكثر احتمالاً؛
- طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة؛
- طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين؛
- طريقة المربعات الصغرى على ثلاث مراحل.

ثالثا–مرحلة تقييم المقدرات:

بعد عملية تقدير معلمات النموذج، تأتي المرحلة الموالية وهي تقييم تلك المعلمات ونقصد بها تحديد ما إذا كانت قيم هذه المعلمات لها مدلول أو معنى من الناحية الاقتصادية، ومن الناحية الإحصائية.

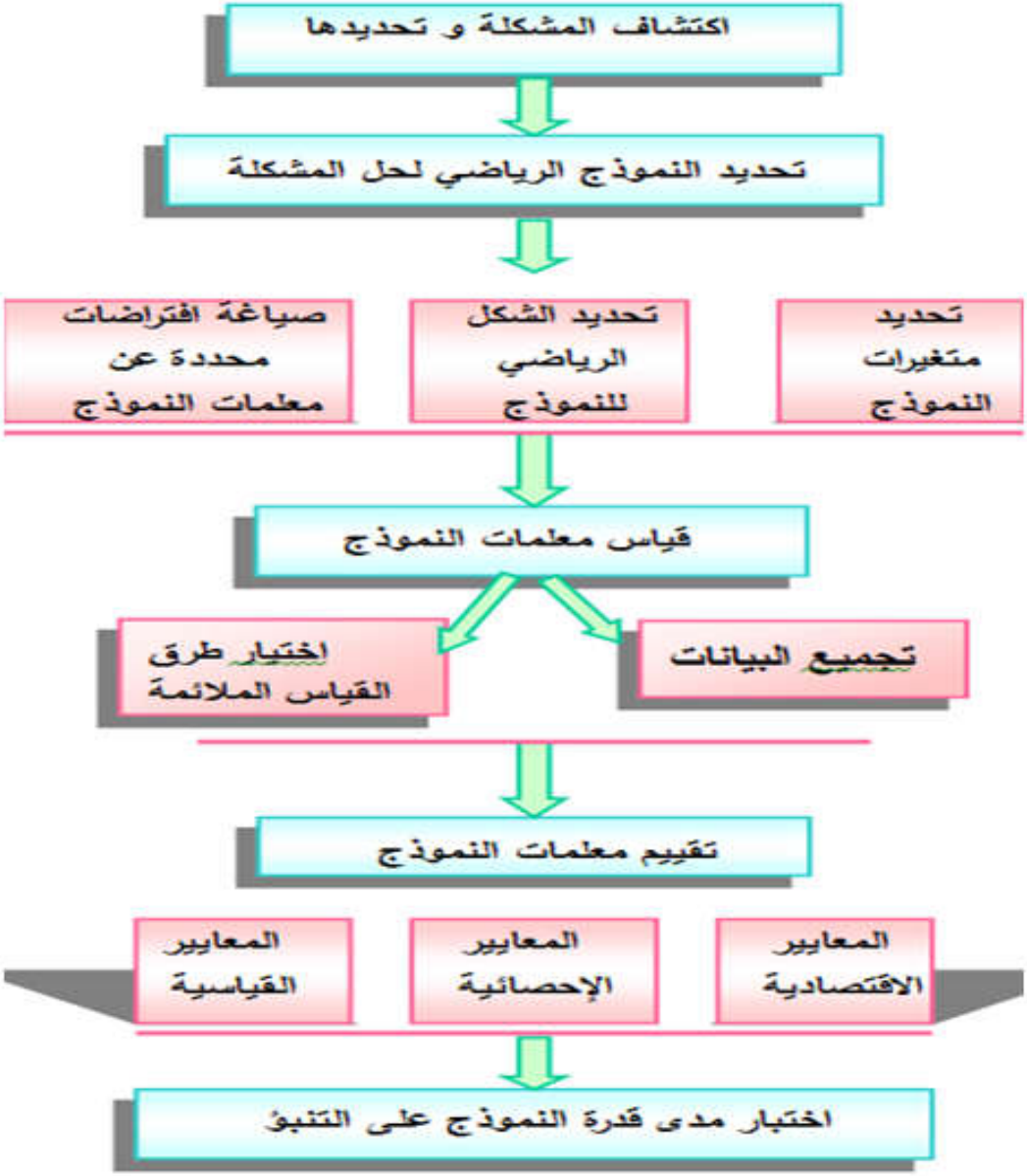
وهناك ثلاث معايير أساسية التي تأخذ كأساس لعملية التقييم:

- ✓ **معايير اقتصادية** :تتحدد المعايير الاقتصادية التي تستخدم في تقييم المعلمات من خلال مبادئ النظرية الاقتصادية، وتتعلق هذه المعايير بحجم وإشارة المعلمات المقدرة، فالنظرية الاقتصادية تضع قيودًا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات وهي تعتمد في ذلك على منطق معين.
- ✓ **معايير إحصائية** : تهدف المعايير الإحصائية إلى اختبار مدى الثقة الإحصائية بالتقديرات الخاصة بمعلمات النموذج، ومن أهمها معامل التحديد واختبارات المعنوية، يسميها البعض باختبارات من الدرجة الأولى.
- ✓ **معايير القياسية:** تهدف هذه المعايير إلى التأكد من أن الافتراضات التي تقوم عليها المعايير الإحصائية منطبقة في الواقع، حيث أن المعايير القياسية تستخدم في اختبار المعايير الإحصائية نفسها، لهذا سميت باختبارات من الرتبة الثانية ومن بين هذه المعايير نجد معايير الارتباط الذاتي، ومعايير الامتداد الخطي المتعدد، ومعايير التعرف، ومعايير الثبات التباين وغيرها.

رابعا–مرحلة تقييم القوة التنبؤية للنموذج

بعد التأكد من جودة الأداء العام للنموذج المقدر، يتم تطبيق النتائج التي تم التوصل لها على الواقع واستخدامها في عملية التنبؤ.

وعموما يمكن توضيح منهجية البحث في الاقتصاد القياسي كما في الشكل التالي:



4-علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الاخرى:

من الواضح أن علم الاقتصاد القياسي يعتمد على ثلاثة علوم هي:

***علم الاقتصاد:** وهذا أمر طبيعي، إذ أن الاقتصاد القياسي هو أحد فروع هذا العلم، فالنظرية الاقتصادية تشير عموماً إلى وجود علاقات معينة بين متغيرات اقتصادية كالعلاقة بين الكمية المطلوبة

من سلعة معينة وسعرها وأسعار السلع البديلة مثلاً ، وتحتاج عملية قياس تلك العلاقات إلى اختيار نماذج قياسية لتمثيلها.

***الرياضيات** : بما توفره من نماذج رياضية يختار الاقتصاد القياسي ما يناسب منها وفق أسس معينة للوصول إلى نموذج لتمثيل العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية المدروسة . ومن الطبيعي أن يكون بعض تلك النماذج أقل جودة في التعبير عن الواقع المعقد من بعضها الآخر.

***الإحصاء:** بما يوفره من أدوات أساسية في القياس كالتي تتعلق بطرائق الاستدلال الإحصائي مثلاً.

الفصـل الثاني

الانحدار الخطي البسيط

الفصل الثاني: الانحدار الخطي البسيط

1.2 تمهيـــــد

يمثل الانحدار احد الأساليب الإحصائية التي تستخدم في قياس العلاقات الاقتصادية حيث يختص بقياس العلاقة بين متغير ما يسمى بالمتغير التابع ومتغير أخر أو مجموعة من المتغيرات تسمى بالمتغيرات المستقلة أو المفسرة.

ويعتبر الانحدار الخطي من ابسط أنواع نماذج الانحدار ،حيث ينقسم إلى نوعين : الانحدار الخطي البسيط والذي يقيس العلاقة الخطية بين متغيرين احدهما تابع والأخر مستقل ، والانحدار الخطي المتعدد الذي يقيس العلاقة الخطية بين متغير تابع واحد وعدة متغيرات مستقلة.

يعتبر تحليل الانحدار الأداة المشتركة والمستعملة في أبحاث الاقتصاد القياسي ، ويهتم تحليل الانحدار بتحديد وتقديم العلاقة بين متغير معتمد Dependent variable (وهو متغير كمي) ومتغير واحد أو أكثر من متغيرات مستقلة Independent variable (متغيرات كمية أو نوعية) ، إذا احتوت معادلة الانحدار متغير مستقل واحد سميت نموذج الانحدار البسيط Simple Regression Model، وإذا احتوت أكثر من متغير مستقل سميت بنموذج الانحدار المتعدد Multiple Regression Model وقد يكون نموذج الانحدار خطي Linear Model أو غير خطي Non linear Model .

كلمة انحدار استخدمت من قبل سير فرنسيس جالتون (1911-1982) Sir Francis Galton من إنجلترا، والذي كان يدرس العلاقة بين طول الأبناء وطول الآباء والذي لاحظ جالتون أن الطول يميل إلى المعدل مع أن الآباء الطوال يكون أبنائهم طوال والآباء القصار يميل أبنائهم لأن يكونوا قصار، أي أن هناك ميل عند ألأبناء للمعدل أي أن هناك انحدار نحو المعدل.في دراسات أخرى مشابهه تحصل على نفس النتيجة التي تحصل عليها جالتون.

2.2 عرض النموذج :

يعتبر الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع نماذج الانحدار وهو يهتم بتوضيح العلاقة بين متغير تابع (Y) ومتغير مستقل أو مفسر (X) ومن الأمثلة على ذلك ما يلي:

- دراسة أثر الإنتاج على التكلفة.
- دراسة أثر كمية البروتين التي يتناولها الأبقار على الزيادة في الوزن.
- أثر الدخل على الإنفاق الاستهلاكي.

ويبدأ الانحدار الخطي البسيط عادة برسم مجموعة من قيم x و y في شكل انتشار ثم التحديد بالنظر ما إذا كانت هناك علاقة خطية تقريبية.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i .....1$$

إن المعادلة (1)لا يمكنها أن تعبر لنا عن حقيقة العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل وذلك لوجود انحرافات في العلاقة الحقيقية بمعنى آخر من غير المتوقع أن تقع النقاط تماما على الخط .لذلك فإن القياس الاقتصادي يستعين بالمتغير العشوائي إذن تصبح المعادلة (1) بالشكل الآتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1.....n$$

حيث :

y_t:المتغير الداخلي (المتغير المفسر) في الزمن t، يتم تحديده ضمن النموذج.

x_t : يفترض انه خارجيt ، المتغير المفسر في الزمن.

α_0, α_1 : معلمات النموذج .

ε_t :الخطأ العشوائي ، ويمثل الفرق بين النموذج الحقيقي والنموذج المحدد.

n : عدد المشاهدات .

ويرجع وجود حد الخطأ إلى إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج و حدوث خطأ في كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية و يرجع ذلك أيضا إلى الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج.

ويترتب على إسقاط هذا الافتراض حدوث أخطاء تحديد تتمثل في إغفال متغيرات مستقلة هامة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أو احتواء هذا النموذج على متغيرات مستقلة غير هامة وفي تغير معاملات الانحدار أي أن معاملات الانحدار قد لا تظل ثابتة أثناء الفترة الزمنية التي تم تجميع البيانات عنها.

3.2 فرضياته:

تتمثل الفرضيات الأساسية فيما يلي:

- **الفرضية 1:** نموذج الانحدار هو خطي بالنسبة ل x_t (أو بالنسبة لأي تحويل للمتغير x_t) كما هو موضح في المعادلة (4.1).

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \varepsilon_t .....(4-1)$$

- **الفرضية 2** : القيم x_t مشاهدة بدون خطأ ، وبعبارة اخرى يفترض ان المتغير x_t غير عشوائي non stochastic.

- **الفرضية 3** : التوقع الرياضي للخطأ العشوائي يساوي الصفر $E(\varepsilon_t) = 0$ وبالتالي فان متوسط الخطأ يساوي الصفر .

- **الفرضية 4** :تباين الخطأ العشوائي ثابت $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$،وهذه الفرضية تسمى بفرضية تجانس الخطأ Homoscedasticity ، وفي هذه الحالة عدم تحقق هذه الفرضية ، فان النموذج يتسم بعدم ثبات تباين الخطأ Heteroscedasticity .

ويمكن تلخيص الفرضية الثانية والثالثة كالآتي: $\varepsilon_i \rightsquigarrow N(0, \delta_\varepsilon^{\,2})$

- **الفرضية 5** : عدم وجود ارتباط ذاتي بين الخطأ $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0$ مع $t \neq t'$، أي أن الأخطاء مستقلة عن بعضها البعض ، الخطأ في الزمن t لا يؤثر على الأخطاء الموالية .

- **الفرضية 6** : المتغير المفسر يأخذ قيم ثابتة أي أنه غير عشوائي وبالتالي لا يوجد لارتباط بين المتغيرة المستقلة والحد العشوائي أي أن : $Cov(X_i, \varepsilon_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, n$

4.2 تقدير معالم نموذج

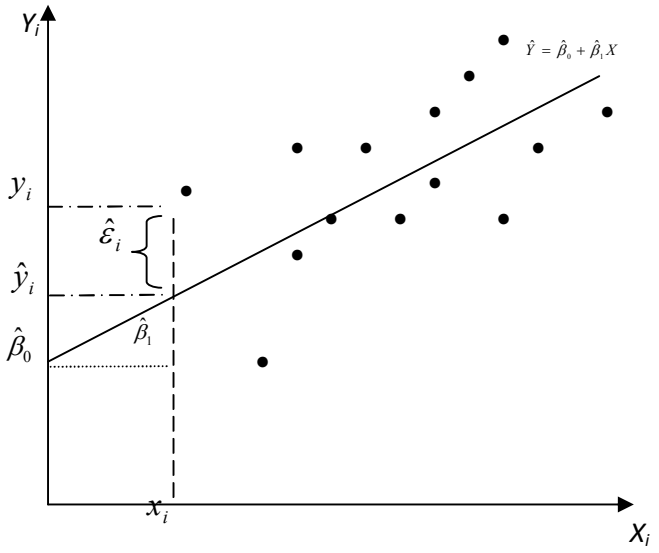
في حالة المتغيرات الاقتصادية يصعب علينا إيجاد علاقة تامة بين مثل هذه المتغيرات الأمر الذي يجعل من المستحيل تمثيلها بيانيا من خلال خط مستقيم يمر بجميع الحالات، ففي مثل هذه الحالات نلجأ إلى تمثيلها من خلال خط مستقيم يعرف بإسم " **خط أفضل تمثيل** " وذلك بفكرة تغير Y في المتوسط عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل X من شكل الانتشار، وتقوم طريقة المربعات الصغرى على فكرة القيمة الصغرى للمربعات من خلال رسم خط انتشار يكون فيه مجموع مربعات انحرافات القيم التي تمثل سحابة النقاط للمتغير التابع وخط الانحدار المقدر أقل ما يمكن.

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y، X إحداثيات النقطة الأولى تنقسم إلى قسمين، **قسم من المحور الأفقي** في النموذج المقدر، هذا عبارة عن $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$. أما **الجزء الثاني** عبارة عن قيمة البوا قي.

فالمشاهدة Y هي حصيلة جمع $\hat{Y} + e$ أي أن أي مشاهده مكونه من جانبين، جانب الخط المقدر والبواقي، والبواقي بحكم أنها مقدرة العنصر العشوائي يمكن أن تكون موجبة وممكن أن تكون سالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

والشكل التال يوضح كل ما سبق

الشكل الرقم (03): الهدف من طريقة المربعات الصغرى



يتم الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS) عن طريق تدنية مجموع مربعات الأخطاء.

$$Min\sum_{t=1}^{t=n}\varepsilon_t^2 = Min\sum_{t=1}^{t=n}(y_t - \alpha_0 - \alpha_1 x_t)^2 = MinS$$

إن من شروط الدرجة الأولى $\frac{\delta S}{\delta \alpha_0} = 0$ و $\frac{\delta S}{\delta \alpha_1} = 0$، يتم الحصول على ما يلي :

$$-2\sum_{t=1}^{t=n}(y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_t) = 0 \text{.....(1)}$$

$$-2\sum_{t=1}^{t=n}x_t(y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_t) = 0 \text{.....(2)}$$

$$-2\sum_i\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \quad 2 \Rightarrow$$

$$\sum_i\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\sum X_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\sum X_i \text{.....3} \Rightarrow$$

المعادلة رقم: (3) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الأولى.

$$-2\sum_i\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2(X_i) = 0 \quad 2 \Rightarrow$$

$$\sum_i\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)(X_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i (Y_i X_i) - \hat{\beta}_0 \sum_i X_i - \hat{\beta}_1 \sum_i X_i^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i (Y_i X_i) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_i + \hat{\beta}_1 \sum_i X_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 4 \Rightarrow$$

المعادلة رقم: (4) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثانية.

بضرب المعادلة رقم (4) في (n) ونضرب المعادلة رقم (3) في $\sum_i X_i$ نتحصل على :

$$\sum_i Y_i \sum_i X_i = n\hat{\beta}_0 \sum_i X_i + \hat{\beta}_1 \left(\sum X_i \right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

$$n\sum_i (Y_i X_i) = n\hat{\beta}_0 \sum_i X_i + n\hat{\beta}_1 \sum_i X_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

بحل المعادلتين (5) و (6) آنيا نحصل على:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{n\sum_i X_i Y_i - \sum_i X_i \sum_i Y_i}{n\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i \right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots 5 \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \ldots\ldots\ldots\ldots 6 \end{cases}$$

ويكون النموذج المقدر (خط الانحدار) بطريقة المربعات الصغرى المقدرة (*OLS*) كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

5.2 خصائص مقدرات المربعات الصغرى :نظرية Gauss-MarKov

إذا تحقق الفرضيات السابقة بنموذج الانحدار الخطي البسيط ، فان المقدرات المحصل عليها بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية تتميز ببعض الخصائص المثلى كما هي واردة في النظرية المعروفة لـ Gauss-MarKov .حسب هذه النظرية ،يعتبر مقدر المربعات الصغرى أفضل مقدر خطي غير متحيز Best LinearUnbiaisedEstimator(BLUE)،وهذا يعني أن مقدر المربعات الصغرى العادية يتميز بأنه:

1.5.2 الخطية:

$\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ تعتبر دالة خطية للعنصر التابع Y وتعطينا هذه الخاصة درجه من السهولة في عند القيام بالحسابات حيث انه لحساب $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ نستعمل المتغير التابع في صوره خطيه فقط هذه لتبسيط الحسابات.

*** $\hat{\beta}_1$ مقدر خطي في Y**

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 01$$

نفرض أن : $W_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$ من خصائها أن : $\boxed{\sum W_i = 0}$

بالتعويض في العلاقة رقم 01 نجد:

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i (Y_i - \bar{Y})$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum (W_i Y_i - W_i \bar{Y})$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i - \sum W_i \bar{Y}$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i - \bar{Y} \sum W_i$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$$

$$\hat{\beta}_1 = W_1 Y_1 + W_2 Y + \ldots\ldots\ldots\ldots W_{n2} Y_n$$

ومنه: $\hat{\beta}_1$ **مقدر خطي في** Y

*** $\hat{\beta}_0$ مقدر خطي في Y**

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 02$$

لدينا : $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i$ **و** $\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$ " **البرهان السابق** $\hat{\beta}_1$ **مقدر خطي في** Y" تصبح العلاقة رقم 02 كالتالي:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum Y_i - \sum W_i Y_i \bar{X}.$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right) Y_i.$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum C_i Y_i$$

$$\hat{\beta}_0 = C_1 Y_1 + C_2 Y + \ldots\ldots\ldots\ldots C_{n2} Y_n$$

حيث أن : $C_i = \frac{1}{n} . - W_i \overline{X}$

ومنه: $\hat{\beta}_0$ **مقدر خطي في** Y

2.5.2* عدم التحيز:

عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة للمعلمة المقدرة $\hat{\beta}_0$ والتي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوسط مقدرة $\hat{\beta}_0$ يساوي β_0 ، ومعنى ذلك أنه إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $\hat{\beta}_0$ يتم أخذ المتوسط، و ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$.

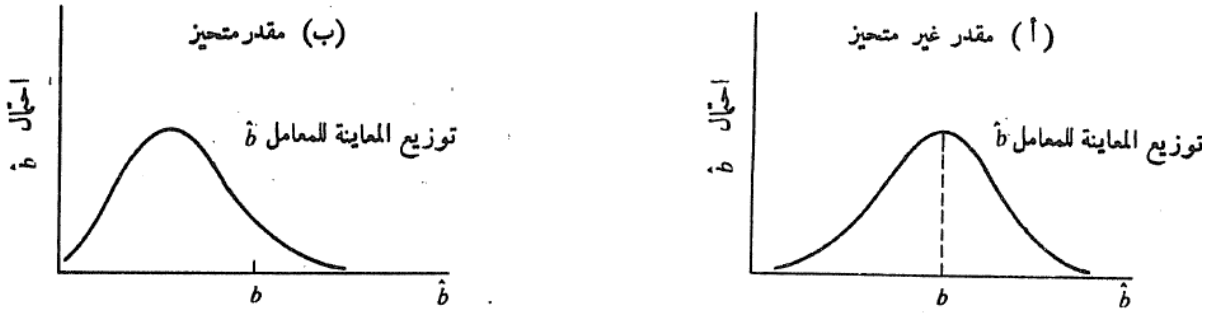
كما مقدرات طريقة مربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}_1$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة β_1 حيث أن $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$.

أي أن توقع مقدرات $\hat{\beta}_1$ يجب أن يساوي المعلمة الحقيقية بمعنى آخر متوسط قيم $\hat{\beta}_1$ أو في المتوسط $\hat{\beta}_1$ تساوي القيمة الحقيقية للمعلمه β_1 .

هذه الأوضاع كلها نظريه بحتة في الواقع لا يكون عندنا عدد من العينات، يكون في الواقع عينه واحدة فقط وتعطينا قيمه واحدة ل $\hat{\beta}_0$ و قيمه واحدة ل $\hat{\beta}_1$ يعتمد عليها في التحليل.

من الناحية النظرية نقول أن هذه المقدرات يتوقع أنها تساوي القيمة الحقيقية من الناحية الأخرى القيمة الحقيقة لا نعرفها وبالتالي هذه الخصائص خصائص نظريه بحتة.

الشكل رقم (04): التحيز وعدم التحيز للمقدرة.



*** البرهان على أن :** $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1.....n$$

$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{\varepsilon}$$

$$Y_i - \overline{Y} = \beta_1 (X_i - \overline{X}) + (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum \left[(X_i - \overline{X})(\beta_1 (X_i - \overline{X}) + (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})) \right]}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\beta_1 \sum (X_i - \overline{X})^2 + \sum (X_i - \overline{X})(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\beta_1 \sum (X_i - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} + \frac{\sum (X_i - \overline{X})(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_i = \beta_1 + \frac{\sum (X_i - \overline{X})(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$E(\hat{\beta}_i) = E(\beta_1) + E\left(\frac{\sum (X_i - \overline{X})(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \right)$$

$$E(\hat{\beta}_i) = E(\beta_1) + \left(\frac{\sum (X_i - \overline{X}) E(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \right) .....03$$

لدينا : $E(\varepsilon_I - \overline{\varepsilon}) = 0$ تصبح العلاقة رقم 03 كالأتي : $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

وبالتالي فإن المقدرة $\hat{\beta}_1$ **مقدرة غير متحيزة .**

***البرهان على أن :** $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{\varepsilon}$$

$$\hat{\beta}_0 = (\beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{\varepsilon}) - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\hat{\beta}_0 = \beta_0 - (\hat{\beta}_1 - \beta_1) \overline{X} + \overline{\varepsilon}$$

$$E(\hat{\beta}_0)= E(\beta_0)- E(\hat{\beta}_1-\beta_1)\overline{X}+E(\varepsilon)$$

$$E(\hat{\beta}_0)= \beta_0- E(\hat{\beta}_1-\beta_1)\overline{X}+E(\varepsilon)$$

$$E(\hat{\beta}_0)= \beta_0- \overline{X}E(\hat{\beta}_1-\beta_1)+E(\varepsilon).....04$$

لدينا : $E(\hat{\beta}_1-\beta_1)=0$ و $E(\varepsilon)=0$ وبالتالي فإن العلاقة رقم 04 تصبح على الشكل التالي :

$$E(\hat{\beta}_0)= \beta_0$$

وبالتالي فإن المقدرة $\hat{\beta}_0$ مقدرة غير متحيزة .

إيجاد تباين $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$$

$$W_i = \frac{(X_i-\overline{X})}{\sum(X_i-\overline{X})^2}$$

$$Var(\hat{\beta}_1)= Var(\sum(W_i Y_i))$$

$$Var(\hat{\beta}_1)= (\sum Var(W_i Y_i))$$

$$Var(\hat{\beta}_1)= (\sum W_i^2 Var(Y_i))$$

$$Var(Y_1)= E(Y_i - E(YI))^2$$

$$Var(Y_1)= E(\beta_0+\beta_1 X_i+\varepsilon-\beta_0-\beta_1 X_i)^2$$

$$Var(Y_1)= E(\varepsilon_i)^2 = E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))^2 = Var(\varepsilon_I)= \sigma^2{}_\varepsilon$$

$$Var(\hat{\beta}_1)= (\sum W_i{}^2 \sigma_\varepsilon{}^2)$$

$$Var(\hat{\beta}_1)= (\sigma_\varepsilon{}^2 \sum W_i{}^2)$$

$$W_i = \frac{(X_i-\overline{X})}{\sum(X_i-\overline{X})^2}$$

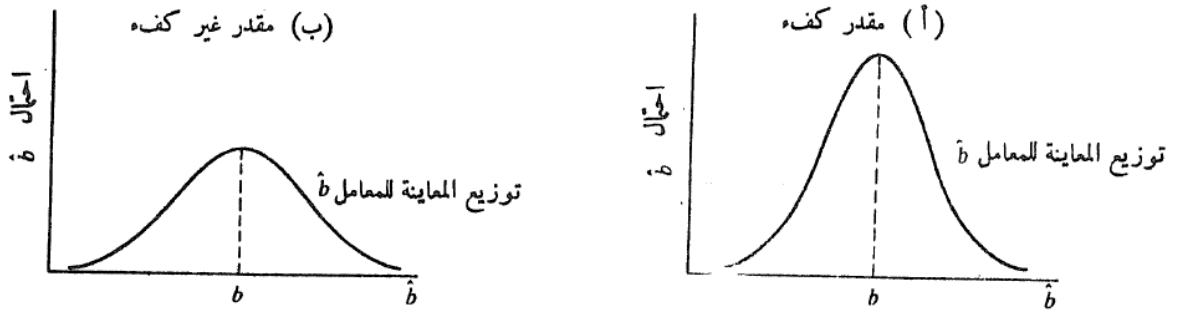
$$W_i^2 = \frac{(X_i-\overline{X})^2}{(\sum(X_i-\overline{X})^2)^2}$$

$$\sum W_i^2 = \sum \left(\frac{(X_i - \bar{X})^2}{\left(\sum (X_i - \bar{X})^2\right)^2} \right)$$

$$\sum W_i^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\left(\sum (X_i - \bar{X})^2\right)^2} = \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\boxed{Var(\hat{\beta}_1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

الشكل رقم (05): مقدر كفؤ وغير كفؤ.



إيجاد تباين $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

لدينا : $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i$ **و** $\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$ " **البرهان السابق** $\hat{\beta}_1$ **مقدر خطي في** Y" تصبح العلاقة رقم 02 كالتالي:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum Y_i - \sum W_i Y_i \bar{X}.$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right) Y_i$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = Var\left[\sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right) Y_i \right]$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sum Var\left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right) Y_i$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X}\right)^2 Var(Y_i)$$

$$Var(Y_1) = \sigma^2{}_\varepsilon$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_\varepsilon{}^2 \sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X}\right)^2$$

$$\sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X}\right)^2 = \sum \left[\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} W_i \bar{X} + (W_i \bar{X})^2\right]$$

$$\sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X}\right)^2 = \left[\sum \frac{1}{n^2}\right] - 2\frac{1}{n}\bar{X} \sum W_i + \bar{X}^2 \sum W_i{}^2$$

$$\sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X}\right)^2 = \frac{n}{n^2} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\boxed{Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_\varepsilon{}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right]}$$

كما يمكن استخدام العلاقة التالية :

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_\varepsilon{}^2 \left[\frac{n\bar{X}^2 + \sum (X_i - \bar{X})^2}{n \sum (X_i - \bar{X})^2}\right]$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_\varepsilon{}^2 \left[\frac{n\bar{X}^2 + \sum X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n \sum (X_i - \bar{X})^2}\right]$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_\varepsilon{}^2 \left[\frac{\sum X^2{}_i}{n \sum (X_i - \bar{X})^2}\right]$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = Var(\hat{\beta}_1)\left[\frac{\sum X^2{}_i}{n}\right]$$

4.5.2 خاصية الاتساق:

إذا واجهنا مشكلة تحيز مقدرة ما، فإننا ننظر إلى الخاصية التقاربية لذلك المقدر، ويحدث ذلك لما يكون المتغير المستقل X_i عبارة عن متغير تابع ومبطئ بفترة زمنية ما، ونقول عن $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق (Consistent Estimator)، إذا كان: كلما $n \to \infty$ فإن توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ يقترب من القيمة الحقيقية β_1، ونقول أن النهاية الاحتمالية للمقدر $\hat{\beta}_1$ هي β_1 ونكتب : $p\lim_{n\to\infty}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

لكن هذا الشرط غير كاف للحصول على مقدر متسق، بل يجب أن تكون قيمتا التحيز والتباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما اقترب n من ما لا نهاية أي:

$$1.\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}_1) = p\lim_{n\to\infty}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$
$$2.\lim_{n\to\infty} \text{var}(\hat{\beta}_1) = p\lim_{n\to\infty} \text{var}(\hat{\beta}_1) = 0$$

وبتحقق هذين الشرطين، نقول عن المقدر $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق للمعلمة الحقيقية. إن المقدرات المتحصل عليها لكل من β_0، β_1 و σ^2 سواء بطريقة المربعات الصغرى أو غيرها هي تقديرات نقطية، ولكن من المهم أن يكون لدى الاقتصادي أكثر من اختيار، ولذلك يجب أن نبني مجالا لهذه المقدرات وذلك بقبول مستوى ثقة معين وهو ما نسميه بالتقدير المجالي للمعالم.

6.2 قياس جودة التوفيق النموذج:

1.6.2 معامل التحديد:

معامل التحديد يعرف بأنه نسبة التغير الإجمالي التي تحدث في المتغير التابع Y الذي يفسره المتغير التابع X وهو يشير أيضا إلى التغير الكلي في المتغير التابع Y التي يمكننا تفسيرها بدلالة المتغير المستقل X ، ولمعامل التحديد خصائص نوجزها في ما يلي:

– هو التغير المفسر بواسطة خط الانحدار إلى التغير الإجمالي للمتغير التابع Y أو هو عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية للمتغير التابع Y

– كلما كانت المشاهدات أقرب إلى خط الانحدار أي كلما صغرت البواقي كلما زاد في Y الذي تفسره معادلة الانحدار المقدرة.

– التغير الإجمالي في Y يساوي التغير المفسر زائد التغير في البواقي.

تساعد البواقي e_i على قياس مدى تمثيل المعادلة المفروضة في النموذج لمشاهدات العينة، حيث أن القيمة الكبيرة للبواقي تعني بأن التمثيل يكون غير جيد والقيمة الصغيرة لها تعني تمثيلا جيدا للنموذج، إن المشكلة في استعمال البواقي كمقياس لجودة التوفيق هو أن قيمة البواقي تعتمد على المتغير التابع Y_i.

تعطي المعادلة الأساسية لتحليل التباين كما يلي:

$$\sum_t (y_t - \bar{y})^2 = \sum_t (\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2 + \sum_t e_t^2$$

$$SC = SCE + SCR$$

التغير الكلي للمتغير الداخلي (SCT) يساوي مجموع التغير المفسر بواسطة النموذج (SCE) والتغير المتبقي التغير غير المفسر (SCR) .

معامل التحديد R^2 الذي يقيس النسبة بين التغير المفسر من طرف النموذج والتغير الكلي ،يعتبر مؤشرا على القوة التفسيرية للنموذج ،فهو يوضح نسبة التغير الكلي في y المفسر بواسطة نموذج الانحدار (المتغيرات المفسرة).

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{t=n} (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{t=n} (y - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{t=n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{t=n} (y - \bar{y})^2}$$

في نموذج الانحدار الخطي البسيط ،معامل التحديد يساوي مربع معامل الارتباط بين المتغيرين x و y :

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{t=n} (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{t=n} (y - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{t=n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{t=n} (y - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = r^2 = \frac{\left[\sum_{t=1}^{t=n} (x - \bar{x})(y - \bar{y})\right]^2}{\sum_{t=1}^{t=n} (x - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^{t=n} (y - \bar{y})^2}$$

في نموذج الانحدار الخطي مع وجود الحد الثابت ،يكون معامل التحديد محصور بين 0 و1 ، وتكون جودة التوفيق قد بلغت الحد الأعلى عندما تكون : $R^2=1$ ، **وأم** جودة التوفيق معدومة عندما فتكون عند $R^2=0$.

2.6.2 معامل الارتباط:

إن الغرض من استخدام معامل الارتباط الخطي هو تحديد نوع وقوة العلاقة بين متغيرين، ويرمز له في حالة المجتمع بالرمز ρ (رو)، وفي حالة العينة بالرمز r ، وحيث أننا في كثير من النواحي التطبيقية نتعامل مع بيانات عينة مسحوبة من المجتمع، سوف نهتم بحساب معامل الارتباط في العينة r كتقدير لمعامل الارتباط في المجتمع، ومن التحديد السابق للغرض من معامل الارتباط.

وفي حالة جمع بيانات عن متغيرين كميين $(x\ ,\ y)$ ، يمكن قياس الارتباط بينهما، باستخدام طريقة "بيرسون" Pearson، ومن الأمثلة على ذلك: قياس العلاقة بين الوزن والطول، والعلاقة بين الإنتاج والتكلفة، والعلاقة بين الإنفاق الاستهلاكي والدخل، والعلاقة بن الدرجة التي حصل عليها الطالب وعدد ساعات الاستذكار، وهكذا الأمثلة على ذلك كثيرة.

ولحساب معامل الارتباط في العينة ، تستخدم صيغة " بيرسون" التالية :

$$r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{\bar{y}})/(n-1)}{\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{(n-1)}}\sqrt{\frac{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}{(n-1)}}} \quad .....01$$

حيث أن :

σ_{xy} : هو التغاير بين (X,Y)

σ_x : هو الانحراف المعياري لقيم (X) .

σ_y : هو الانحراف المعياري لقيم (Y) .

ويمكن اختصار الصيغة السابقة على النحو التالي:

$$r=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i-\bar{X})^2}\sqrt{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}} \quad .....02$$

بتربيع العلاقة رقم 02 نجد :

$$r^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \sqrt{\sum (X_i - \bar{X})} \sqrt{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad \text{.....02}$$

$$r^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad \text{.....03}$$

$$r^2 = \frac{\hat{\beta}_1{}^2 \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad \text{.....04}$$

لدينا : $\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$ .....05 مقدرة انحدار x على Y.

تصبح العلاقة رقم 04 كما يلي:

$$r^2 = \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2$$

$$\boxed{r = \pm \sqrt{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2} \quad \text{..... ..06}}$$

نضرب ونقسم العلاقة رقم:04 في $\sum (X_i - \bar{X})^2$ نتحصل على:

$$r^2 = \frac{\hat{\beta}_1{}^2 \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_i - X)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 \sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \text{.....07}$$

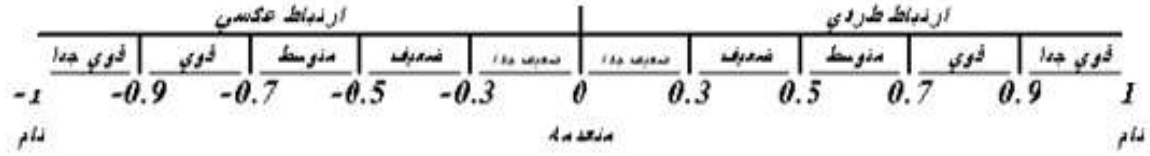
$$r^2 = \frac{\hat{\beta}_1{}^2 \sum (X_i - \bar{X})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad \text{.....08}$$

$$r^2 = \frac{SCE}{SCT} \quad \text{.....}$$

$$\boxed{r = \pm \sqrt{R^2} \quad \text{.....09}}$$

ويمكن الحكم على قوة العلاقة من حيث درجة قربها أو بعدها عن (± 1)، حيث أن قيمة معامل الارتباط تقع في المدى $(-1 \prec r \prec +1)$، وقد صنف بعض الإحصائيين درجات لقوة العلاقة يمكن تمثيلها على الشكل التالي:

الشكل رقم (06) : درجات قوة معامل الارتباط .



7.2 اختبار الفرضيات :

بمعرفة توزيع $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ يمكن إجراء اختبار الفرضيات الموضوعة حول معالم النموذج β_0 و β_1 على التوالي. الاختبار الشائع جدا هو فرضية العدم H_0، وتقترح على العموم بأنه لا يوجد أثر على النموذج من قبل متغير مستقل ما، ونظرا إلى أن الباحثين يتمنون قبول النموذج، فإن فرضية العدم توضع عادة لإثبات رفضها إذا أمكن ذلك. ونأمل رفض H_0 بإيجاد القيمة التقديرية والتي تكون تختلف عن الصفر، حتى نقبل النموذج.

1.7.2 اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم

قد يكون النموذج المبني من طرفنا صحيحا أو غير صحيح، و تثبت صحته من خلال اختباره، ويتم ذلك بواسطة فرض معلمة من معالم النموذج تساوي الصفر أو أي عدد آخر، وتسمى فرضية العدم H_0، وما دامت العلاقة بين Y و X قائمة على أساس النموذج الخطي، فإن انعدام هذه العلاقة يعني بأن خط انحدار المجتمع هو عبارة عن خط أفقي، أي $(H_0 : \beta_1 = 0)$ وبما أن الافتراض H_0 خاضع للاختبار، فإنه لا يكون بالضرورة صحيحا، الأمر الذي يتطلب منا وضع فرض بديل $H_1 : \beta_1 \neq 0$. وفي حالة معرفة إشارة β_1 مسبقا من النظرية الاقتصادية فإن الافتراض البديل يكون $H_1 : \beta_1 > 0$ (أو $H_1 : \beta_1 < 0$)، وإذا طلب منا اختبار الفرضية :

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{(فرضية العدم)}$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0 \quad \text{(الفرضية البديلة)} \quad \text{ضد :}$$

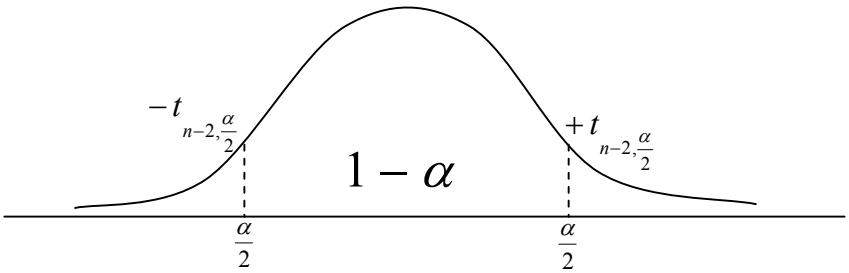
$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

نكتب: $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ وهي القيمة المحسوبة.

ما دمنا نختبر فرضية العدم، نكتب: $t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$، حيث نقبل H_0 بمستوى معنوية $(\%\alpha)$ إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| \le t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ ففي هذه الحالة، المعلم β_1ليس له معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر حيث $t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ مأخوذة من جدول التوزيع t (ستودنت) وتسمى بالقيمة المجدولة، ونرفض H_0 بمستوى معنوية $(\%\alpha)$ إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| > t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلم β_1 له معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر. نقوم بنفس الاختبار مع الثابتة β_0. إضافة إلى ذلك، عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n > 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

ويمكن توضيح كل ما سبق في مايلي:

الشكل رقم (07) : توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ ثنائي الطرف.



ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n > 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

2.7.2 حدود الثقة لمعلمات الانحدار

لبناء مجال الثقة للمعالم، يتعين معرفة تباين كل من $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$و البواقي.

- تباين $\hat{\beta}_0$:

$$\text{var}(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2$$

- تباين : $\hat{\beta}_1$

$$\text{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} + \bar{X}^2 \text{var}(\hat{\beta}_1)$$

وبناءا على هذا التعريف تكون الانحرافات المعيارية (Standard déviations) هي الجذور التربيعية لتباينات المقدرات، أما الأخطاء المعيارية (Standard errors) فهي الجذور التربيعية لمقدرات الانحرافات المعيارية أي :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_0)} = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_1)} = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

نلاحظ أن تباين كل مقدر غير معروف لأنه يرتبط بتباين الأخطاء النظري σ_ε^2، فينبغي في هده الحالة تقدير تباين الأخطاء للحصول على تباين البواقي :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

القيمة التي في البسط تعبر عن مجموع مربعات البواقي حيث $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ أما $n-2$ فهي درجة الحرية، تعبر عن حجم العينة ناقص 2 و ذلك لوجود معلمين للتقدير في النموذج.

وفيما يخص حدود أو فترات الثقة لمعاملات الانحدار، فهي تقدير مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة أي المعلمة المجتمع، ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى الذي يرمز له بالرمز L و الحد الأعلى الذي يرمز له بالرمز U، ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيم المعلمتين: β_0 و β_1 بين هذه الحدين.

عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \right] = 1-\alpha$$

و الصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

أي معلمة المجتمع= المعلمة المقدرة $\pm$ $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\text{n-k}\right)}$ *الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة.

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \quad , \quad \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع *Student* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\%\alpha)$ ونجدها من جدول توزيع القيمة المحسوبة.

تتراوح قيمة معامل الثقة بين 90%، 95% ، 100% ، كما أن مستوى المعنوية هو احتمال تكميلي لمعامل الثقة، هذا يعني حاصل جمع معامل الثقة ومستوى المعنوية يساوي الواحد، فإذا كان معامل الثقة 95%، فإن مستوى المعنوية يكون 5% وهكذا، وبناءاً عليه يمكن تعريف فترة الثقة بأنها " الفترة التي توجد فيها القيمة الفعلية لـB بين حد أدنى و أعلى وباحتمال معين".

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n>30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

وتصبح العلاقة السابقة كالأتي:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \quad , \quad \hat{\beta}_0 + Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad \hat{\beta}_1 + Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع *الطبيعي* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\%\alpha)$ ونجد من جدول التوزيع الطبيعي القيمة المجدولة.

3.7.2 اختبار التوزيع F (اختبار المعنوية الكلية للنموذج)

يهدف هذا التوزيع لاختبار لجودة النموذج ويجيب يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويتم بواسطة هذا الاختبار اختبار المعنوية الكلية للانحدار باستخدام نسبة التباين المفسر إلى التباين غير مفسرة.

وتختبر الفرضية التي تنص على أن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر، أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع.

وتكون الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالاتي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_1 = 0$ الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

(الفرضية البديلة) $H_1 : \beta_1 \neq 0$ الانحدار ككل له دلالة معنوية

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F = \frac{SCE/k-1}{SCR/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}$$

بتقسيم البسط والمقام على SCT نجد :

$$F = \frac{\frac{SCE/k-1}{SCT}}{\frac{SCR/(n-k)}{SCT}} \sim F_{k-1,n-k}$$

تصبح العلاقة على الشكل التالي:

$$F = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/(n-k)} =\sim F_{k-1,n-k}$$

حالة خاصة في الانحدار الخطي البسيط:

لدينا:

$$F = \frac{SCE/k-1}{SCR/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}$$

$$F = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum (X-\bar{X})^2}{\sum e_i^2/(n-k)} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2_e} \sim F_{k-1,n-K}$$

$$F = \frac{\frac{\hat{\beta}_1^2}{\sigma^2_e}}{\frac{}{\sum (X-\bar{X})^2_i}} \sim F_{k-1,n-k}$$

$$F = \frac{\hat{\beta}_1^2}{Var(\hat{\beta})} = \left[\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}}}\right]^2 = \left[t_{c\hat{\beta}}\right]^2$$

في توزيع F، نختبر انعدام كل المعالم في آن واحد ضد فرضية معنوية الميل. القيمة المجدولة لإحصائية Fisher في هذه الحالة تعتمد على درجتي حرية 1 (في البسط) و $n-2$ (في المقام).

إذا كان $F_C \leq F_t$ ففي هذه الحالة الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية إحصائية .

إذا كان $F_C \geq F_t$ ففي هذه الحالة الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية .

8.2 التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار:

إن أحد الأهداف الرئيسية لتطبيق بحث الاقتصاد القياسي هو استخدام النموذج المقدر للتنبؤ بقيمة المتغيرات التابعة استناداً إلى قيم المتغيرات المستقلة من أجل التعرف على مسار الظاهرة موضوع البحث في المستقبل، حيث يعرف التنبؤ بأنه تحليل بيانات الماضي وتطبيق نتائجها على المستقبل من خلال استخدام نموذج رياضي مناسب، أي أن $\hat{Y}$ تستخدم في التنبؤ.

9.2 مثـــــال تطبيـــــــــقي01 :

لدراسة أثر الاستثمار الأجنبي المباشر على الصادرات لدينا البيانات المتعلقة بهذين المتغيرين مقاسان بألف الدولار للفترة الممتدة عشر سنوات في الجزائر :

Y_i الصادرات	X_i الاستثمار الأجنبي المباشر
16	20
18	24
22	28
22	21
28	31
27	28
25	32
30	36
30	40
32	40

المطلـــــــوب :

1 أوجد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية "؟ قدم تفسير الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة؟

2. أحسب الانحراف المعياري المقدر لكل من $\hat{\beta}_1$ **et** $\hat{\beta}_0$ ؟

3. أوجد معامل التحديد ؟ ماذا تستنتج ؟ فسر معامل الارتباط ؟

4. قدر معالم النموذج عند مستوى ثقة **95%** ؟

5. اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t **et** F عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ؟

6. أوجد حجم الصادرات عند القيمة 42 ألف دولار .

الحـــــــــل :

1* <u>إيجاد المعادلة المقدرة .</u>

X_i الاستثمار الأجنبي المباشر	Y_i الصادرات	$x_i y_i$	x_i^2
20	**16**	**320**	**400**
24	**18**	**432**	**576**
28	**22**	**616**	**784**
21	**22**	**462**	**441**
31	**28**	**868**	**961**
28	**27**	**756**	**784**
32	**25**	**800**	**1024**
36	**30**	**1080**	**1296**
40	**30**	**1200**	**1600**
40	**32**	**1280**	**1600**
$\sum X_i = 300$ $\bar{X} = 30$	$\sum Y_i = 250$ $\bar{Y} = 25$	$\sum (x_i y_i) = 7814$	$\sum x_i^2 = 9466$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_i X_i^2 - n\left(\overline{X}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{7814 - 10 \times 30 \times 25}{9466 - 10 \times (30)^2} = \frac{314}{466}$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.673$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\hat{\beta}_0 = 25 - 0.673 \times 30 = 25 - 20.21$$

$$\hat{\beta}_0 = 4.785$$

معادلة خط الانحدار المقدر على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_i = 4.785 + 0.673X_i$$

- **شرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة .**

$\left(\hat{\beta}_0 = 4.785\right)$: إذا كان الاستثمار الأجنبي المباشر معدوم (أي: $X_i = 0$) ، فإن الصادرات (Y_i) هي 4.785 ألف دولار .

$\left(\hat{\beta}_1 = 0.673\right)$: إذا زاد الاستثمار الأجنبي المباشر بوحدة واحدة تزيد الصادرات ب 0.673 وحدة نقدية.

2*حساب الانحراف المعياري المقدر لكل من $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_0$.

- **حساب الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_1$**

لدينا:

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma_e^2 \quad \frac{1}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

إيجاد $\sum e_i^2$:

لدينا : $\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = 260$$

$$SCE = \sum_I \left(\hat{Y} - \bar{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum_I \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = (0.673)^2 \times 466 = 211.58$$

$$SCR = \sum e^2{}_i = SCT - SCE = 48.42$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e^2{}_i}{n-k} = \frac{48.42}{10-2} = 6.05$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma_e^2 \quad \frac{1}{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2} = 6.05 \frac{1}{466} = 0.0129$$

$$\sigma(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0.0129} = 0.113$$

* **حساب الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_0$:**

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \sigma_e^2 \left[\frac{\sum X^2{}_i}{n \sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2}\right]$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = 6.05 \left[\frac{9466}{10 \times 466}\right] = 12.29$$

$$\sigma(\hat{\beta}_0) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{12.29} = 3.50$$

3* إيجاد معامل التحديد مع التفسير.

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT}$$

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum_I \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sum_I \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

$$R^2 = \frac{211.58}{260} = 0.81$$

أو :

$$R^2 = 1 - \frac{48.42}{260} = 0.81$$

التفسير : الصادرات $\left(Y_i\right)$ مفسرة ب : 81% عن طريق الاستثمار الاجنبي $\left(X_i\right)$ وتبقى 19% تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء إرتكبناها أثناء القياس ، على العموم هو هامش قليل جدا دلالة على قوة النموذج التفسيرية.

- **إيجاد معامل الارتباط مع التفسير.**

" لأن ميل الانحدار موجب :

$$r = \pm\sqrt{R^2} = +\sqrt{R^2} \text{ "}$$

$$r = +\sqrt{R^2} = \sqrt{0.81} = 0.90$$

التفسير : هناك علاقة طردية وقوية جدا بين الصادرات والاستثمار الأجنبي المباشر.

4* تقدير معالم النموذج عند مستوى ثقة 95% .

لدينا :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \quad , \quad \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_0 \in [4.785 - 2.306\times 3.50 \quad , \quad 4.785 + 2.306\times 3.50] = [-3.286 \quad 12.856]$$

$$\beta_1 \in [0.673 - 2.306\times 0.113 \quad , \quad 0.673 - 2.306\times 0.113] = [0.412 \quad 0.933]$$

هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 0.933 والأدنى 0.412 ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_0 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_0 بين الحدين الأعلى 12.856 والأدنى 3.286- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

5*اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية α = 5% .

- اختبار معنوية الميل عند مستوى معنوية **α = 5%** .

فرضيات هذا الاختبار هي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_1 = 0$ الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

(الفرضية البديلة) $H_1 : \beta_1 \neq 0$ الانحدار ككل له دلالة معنوية

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_c وتساوي :

حيث أن: $t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.673}{0.113} = 5.95$$

حيث أن : $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:تقارن القيمة المحسوبة مع القيمة المجدولة

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

أي $t_{t=}t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0.025} = 2.306$.

إذا $\left|t_c\right| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر أي أن الاستثمار الأجنبي المباشر يؤثر على الصادرات.

- اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية **α = 5%** .

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن: $t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_0 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{4.785}{3.50} = 1.36$$

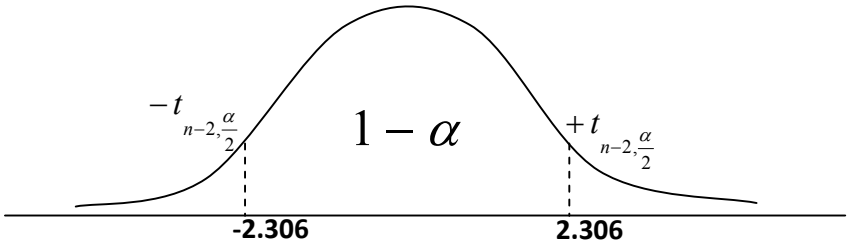
مقارنة t_c مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$

حيث أن:

$\frac{\alpha}{2}=\frac{0.05}{2}=0.025$: مستوى المعنوية و $k=2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

أي $t_t=t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}=t_{8,0.025}=2.306$.

إذا $|t_c| \prec t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليس لها معنوية إحصائية فهو لا يختلف معنويا عن الصفر .



6* اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالأتي:

الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F=\frac{SCE/k-1}{SCR/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}$$

$$F=\frac{211.58/2-1}{48.42/(10-2)}=\frac{211.58/1}{48.42/8}=34.95 \sim F_{(1,\ 8)}$$

أو : $$F=\frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/(n-k)}=\frac{0.81/1}{(1-0.81)/8}=34 \sim F_{(1,\ 8)}$$

أو : $$F=\frac{\hat{\beta}_1^2}{Var(\hat{\beta})}=\left[\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}}}\right]^2=\left[t_{c\hat{\beta}}\right]^2=(5.95)^2$$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية Fisher في هده الحالة تعتمد على درجتي حرية 1 (في البسط) و $n-2$ (في المقام).

$$F_t=F_{k-1,n-k}=F_{(1,8)}=5.32$$

نلاحظ أن $F_C \geq F_t$ نقبل H_1 ونرفض H_0 الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية أي أن: الاستثمار الأجنبي المباشر (X_i) يؤثر فعلا في الصادرات (Y_i) .

7*إيجاد حجم الصادرات عند القيمة 42 ألف دولار.

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_f$$

$\hat{Y}_f = 4.785 + 0.673 * 42 = 33.051$ أي : حجم الصادرات عندما يكون الاستثمار الأجنبي المباشر 42 ألف هو 43.282 ألف دينار.

10.2 مثـــــال تطبيـــــــــــقي02 :

لدراسة أثر الصادرات على الاستثمار الأجنبي المباشر لدينا البيانات المتعلقة بهذين المتغيرين مقاسان بألف الدولار للفترة الممتدة عشر سنوات في الجزائر :

Y_i الاستثمار الأجنبي المباشر	X_i الصادرات
20	16
24	18
28	22
21	22
31	28
28	27
32	25
36	30
40	30
40	32

المطلـــــــوب :

1 أوجد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية "؟ قدم تفسير الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة؟

2. أحسب الانحراف المعياري المقدر لكل من $\hat{\beta}_1$ **et** $\hat{\beta}_0$ ؟

3. أوجد معامل التحديد ؟ ماذا تستنتج ؟ فسر معامل الارتباط ؟

4. قدر معالم النموذج عند مستوى ثقة **95%** ؟

5. اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t **et** F عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ؟

6. أوجد حجم الاستثمار الأجنبي المباشر عند القيمة 36 ألف دولار .

الحـــــــــل :

1* إيجاد المعادلة المقدرة .

X_i الصادرات	Y_i الاستثمار الأجنبي المباشر	$x_i y_i$	x_i^2
16	20	320	256
18	24	432	324
22	28	616	484
22	21	462	484
28	31	868	784
27	28	756	729
25	32	800	625
30	36	1080	900
30	40	1200	900
32	40	1280	1024
$\sum X_i = 250$ $\overline{X} = 25$	$\sum Y_i = 300$ $\overline{Y} = 30$	$\sum (x_i y_i) = 7814$	$\sum x_i^2 = 6510$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i X_i Y_i - n\,\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_i X_i^2 - n\left(\overline{X}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{7814 - 10 \times 25 \times 30}{6510 - 10 \times (25)^2} = \frac{314}{260}$$

$$\hat{\beta}_1 = 1.207$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\hat{\beta}_0 = 30 - 1.207 \times 25 = 30 - 30.17$$

$$\hat{\beta}_0 = -0.17$$

معادلة خط الانحدار المقدر على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_i = -0.17 + 1.207 X_i$$

- **شرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة .**

$\left(\hat{\beta}_0 = -0.17\right)$: إذا كانت الصادرات معدومة (أي: $X_i = 0$) ، فإن الاستثمار الأجنبي المباشر (Y_i) هو 0.17- ألف دولار .

$\left(\hat{\beta}_1 = 1.207\right)$: إذا زادت الصادرات بوحدة واحدة يزيد الاستثمار الأجنبي المباشر ب 1.207 وحدة نقدية.

2*حساب الانحراف المعياري المقدر لكل من $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_0$.

- **حساب الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_1$**

لدينا:

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e^2_i}{n-k}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma_e^2 \quad \frac{1}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

إيجاد $\sum e^2_i$:

لدينا : $\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = 466$$

$$SCE = \sum_I \left(\hat{Y} - \overline{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum_I \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = (1.207)^2 \times 260 = 378.78$$

$$SCR = \sum e^2_i = SCT - SCE = 87.22$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e^2_i}{n-k} = \frac{87.22}{10-2} = 10.90$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma_e^2 \quad \frac{1}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} = 10.90 \frac{1}{260} = 0.0419$$

$$\sigma(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0.0419} = 0.204$$

* **حساب الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_0$:**

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \sigma_e^2 \left[\frac{\sum X^2_i}{n\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = 10.90\left[\frac{65.10}{10\times 260}\right] = 0.27$$

$$\sigma(\hat{\beta}_0) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{0.27} = 0.52$$

3* إيجاد معامل التحديد مع التفسير.

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT}$$

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum_I (X_i - \bar{X})^2}{\sum_I (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$R^2 = \frac{378.78}{466} = 0.81$$

أو :

$$R^2 = 1 - \frac{87.22}{466} = 0.81$$

التفسير : الاستثمار الاجنبي المباشر (Y_i) مفسرة ب : 81% عن طريق الصادرات (X_i) وتبقى 19% تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء إرتكبناها أثناء القياس ، على العموم هو هامش قليل جدا دلالة على قوة النموذج التفسيرية.

- **إيجاد معامل الارتباط مع التفسير.**

" لأن ميل الانحدار موجب :

$$r = \pm\sqrt{R^2} = +\sqrt{R^2}$$ "

$$r = +\sqrt{R^2} = \sqrt{0.81} = 0.90$$

التفسير : هناك علاقة طردية وقوية جدا بين الصادرات والاستثمار الأجنبي المباشر.

4* تقدير معالم النموذج عند مستوى ثقة 95% .

لدينا :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \quad , \quad \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_0 \in [-0.17 - 2.306 \times 0.419 \quad , \quad -0.17 + 2.306 \times 0.419] = [-1.136 \quad 0.796]$$
$$\beta_1 \in [1.207 - 2.306 \times 0.204 \quad , \quad 1.207 + 2.306 \times 0.204] = [0.736 \quad 1.677]$$

- هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 1.677 والأدنى 0.736، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_0 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_0 بين الحدين الأعلى 0.796 والأدنى 1.136- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

5*اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية α = 5%

- اختبار معنوية الميل عند مستوى معنوية **α = 5%** .

فرضيات هذا الاختبار هي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_1 = 0$ الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

(الفرضية البديلة) $H_1 : \beta_1 \neq 0$ الانحدار ككل له دلالة معنوية

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_c وتساوي :

حيث أن: $$t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{1.207}{0.204} = 5.91$$

حيث أن : $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:تقارن القيمة المحسوبة مع القيمة المجدولة

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

أي $t_{t=}t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0.025} = 2.306$.

إذا $|t_c| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر أي أن الصادرات تؤثر على الاستثمار الأجنبي المباشر.

- اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية **α = 5%** .

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن: $t_C = \dfrac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_0 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{0.17}{0.419} = 0.405$$

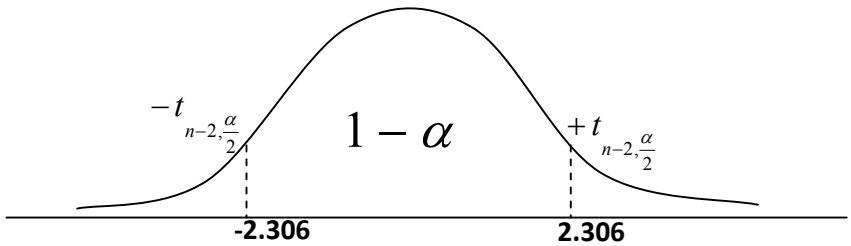
مقارنة t_C مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$

حيث أن:

$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

أي $t_t = t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0.025} = 2.306$.

إذا $|t_c| \prec t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليس لها معنوية إحصائية فهو لا يختلف معنويا عن الصفر .



6* اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية α = 5% .

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالأتي:

الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F = \frac{SCE/k-1}{SCR/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}$$

$$F = \frac{378.78/2-1}{87.22/(10-2)} = \frac{378.78/1}{87.22/8} = 34.74 \sim F_{(1,\ 8)}$$

أو :

$$F = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{0.81/1}{(1-0.81)/8} = 34 \sim F_{(1,\ 8)}$$

أو :

$$F = \frac{\hat{\beta}_1^2}{Var(\hat{\beta})} = \left[\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}}}\right]^2 = \left[t_{c\hat{\beta}}\right]^2 = (5.91)^2$$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية Fisher في هده الحالة تعتمد على درجتي حرية 1 (في البسط) و $n-2$ (في المقام).

$$F_t = F_{k-1,n-k} = F_{(1,8)} = 5.32$$

نلاحظ أن $F_C \geq F_t$ نقبل H_1 ونرفض H_0 الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية أي أن: الصادرات (X_i) تؤثر فعلا في الاستثمار الأجنبي المباشر (Y_i) .

7*إيجاد حجم الاستثمار الأجنبي المباشر عند القيمة 36 ألف دولار.

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_f$$

$\hat{Y}_f = -0.17 + 1.207 * 36 = 43.282$ أي : حجم الاستثمار الأجنبي المباشر عندما تكون الصادرات 36 ألف هو 43.282 ألف دينار.

11.2 الأسئـــــلة والتمـــــارين :

التمرين رقم 01 : الأسئـلة النظرية :

-مادا نعني و ما هي وظيفة كل من :

* الاقتصاد القياسي

* تحليل الانحدار الخطي

* تحليل الانحدار البسيط

- ما علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى؟

- ماهي أهداف الاقتصاد القياسي ؟

- ما هي منهجية الاقتصادي القياسي؟

- أذكر الفروض الكلاسيكية للانحدار الخطي البسيط وأعطي تفسيرا لكل منها ؟

- ما هو هدف طريقة المربعات الصغرى ولماذا لم نستعمل $\mathbf{Min}\Sigma \mathbf{e_i}$ و $\mathbf{Min}\Sigma|\mathbf{e_i}|$ ؟

- لماذا يتم ادخال الخطأ العشوائي ؟

- مالفرق بين معامل الارتباط والمعامل التحديد ؟

- لماذا تعتبر طريقة المربعات الصغرى أفضل طريقة للتقدير ؟

- ما الفرق بين اختبار ستودينت واختبار فيشر؟

- ماهي خصائص طريقة المربعات الصغرى؟

التمرين رقم 02 :

* برهن أن : $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ مقدرتان خطيتان ؟

* برهن أن : $E(\hat{\beta}_0)=\beta_0$ و $E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$ ماذا تستنتج ؟

* أوجد : $Var(\hat{\beta}_0)_0$ و $Var(\hat{\beta}_1)$ ثم بين أن : $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}_1) = p\lim_{n\to\infty}(\hat{\beta}_1)=\beta_1$ و

$\lim_{n\to\infty} a\ \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = p\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\beta}_1)=\beta_1$ ؟

التمرين رقم 03 :

يبين الجدول التالي حجم الناتج الداخلي المحلي والانفاق الحكومي .

الوحدة : مليار دولار

الانفاق الحكومي x	الناتج المحلي Y
4	25.6
8	32.7
12	45.4
16	53.9
20	59.0
24	62.6
28	65
32	65.5

الأسئلة:

1- قدر معادلة النموذج $Y_i=a+bx_i$ ، ثم قم بتفسير النموذج المقدر؟

2- احسب مجموع مربعات الأخطاء ؟.

3- احسب تباين المعلمتين a و b ؟.

4- أحسب معامل الارتباط r ومعامل التحديد R مع تفسير كل منهما ؟.

5- إختبر معنوية كل من المعلمتين a و b ، ثم اختبر معنوية النموذج كليا ؟.

التمرين رقم 04 :

يبين الجدول التالي معدل النمو الاقتصادي ومعدل الانفتاح التجاري.

معدل الانفتاح التجاري t_i	معدل النمو الاقتصادي r_i
0.2	1.1
0.3	1.2
0.3	1.2
0.4	1.3
0.5	1.5
0.6	1.6
0.7	1.7
0.7	1.8

الأسئلة:

1- قدر معادلة النموذج $Y_i=a+bx_i$ ، ثم قم بتفسير النموذج المقدر؟

2- احسب مجموع مربعات الأخطاء $\sum_{i=1}^{n} e^2$ ؟.

3- احسب تباين المعلمتين a و b ؟.

4- أحسب معامل الارتباط r ومعامل التحديد R^2 مع تفسير كل منهما ؟.

5- إختبر معنوية كل من المعلمتين a و b ، ثم اختبر معنوية النموذج كليا ؟.

التمرين رقم 5 :

يبين الجدول التالي حجم الناتج الداخلي المحلي والانفاق الحكومي في الجزائر :

الانفاق الحكومي x	الناتج المحلي Y
5	20
8	30
14	40

16	50
20	60
25	60
28	65
34	68

الأسئلة:

1 أوجد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية "؟ قدم تفسير الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة؟

2. أحسب الانحراف المعياري المقدر لكل من $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_0$ ؟

3. أوجد معامل التحديد ؟ ماذا تستنتج ؟ فسر معامل الارتباط ؟

4. قدر معالم النموذج عند مستوى ثقة **95%** ؟

5. اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t et F عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ؟

6. أوجد حجم الناتج المحلي الاجمالي عند القيمة 36 ألف دولار .

التمرين رقم06 :

إن مكتب الدراسات لميناء الجزائر يريد بناء نموذج اقتصادي للتنبؤ، و بالتالي أراد أن يفسر حركة البواخر في هذا الميناء بالاستهلاك القومي، و تتوفر لديهم المعطيات لتسع السنوات الأخيرة .

حركة البواخر	**2**	**5**	**7**	**4**	**6**	**8**	**9**	**6**	**10**
الاستهلاك القومي	**1**	**3**	**4**	**5**	**7**	**6**	**8**	**10**	**11**

المطلوب:

1 – الاستهلاك القومي بالمليون طن .

2 – حركة البواخر تقاس بألف وحدة.

3- أرسم شكل الانتشار ؟ماذا تلاحظ ؟

4- قدم تفسيرا اقتصاديا لمعالم النموذج ؟

5- أرسم خط الانحدار الموافق ؟ أحسب كل من: $Var(\hat{\beta}_0)$ و $Var(\hat{\beta}_1)$ ؟

6-ما هو حجم حركة البواخر فيما لو توقعنا أن حجم الاستهلاك القومي 15 طن ؟

التمرين رقم07 :

يبين التوزيع التالي العلاقة بين تطور معدل التضخم وسعر الصرف في إحدى الدول خلال 10 سنوات :

السنوات	معدل التضخم Y_i	سعر الصرف X_i
2008	20	16
2009	24	18
2010	28	22
2011	21	22
2012	31	28
2013	28	27
2014	32	25
2015	36	30
2016	40	30
2017	40	32

الأسئلة:

- ما هو النموذج القياسي الذي يربط المتغيرين X، Y ؟
- إذا كانت فرضيات طريقة المربعات الصغرى محققة، قدر معالم نموذج العلاقة (X,Y)
- قدم تفسيرا اقتصاديا للمعالم المقدرة؟
- قدر تباين المتغير العشوائي σ_ε^2 ؟
- قدر تباين معالم النموذج؟

- قدر معالم النموذج على مجال ثقة بمعنوية $\alpha = 0.05$؟
- أحسب معامل التحديد R^2 ؟ماذا تستنتج ؟
- أحسب $r(X,Y)$؟ ماذا تستنتج ؟
- اختبر معنوية معالم النموذج باستخدام اختبار t و F بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟
- ما هو معدل التضخم فيما لو كان سعر الصرف 40؟

التمرين رقم08 :

يبين الجدول التالي قيم الاستهلاك والدخل الحقيقيين للعائلات الجزائرية خلال الفترة 2001-2015:

الوحدة: 10 دج

السنوات	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
الاستهلاك	5.5	6.0	6.5	6.0	7.50	7.5	7.5
الدخل	6	7	7.5	8.0	8	8.5	8.5
2008	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
6.5	9.5	10.5	10.5	11	11.5	11.00	11.5
8.0	10.5	11.5	12.0	13.5	13.5	14	12.2

المطلوب:

1- أرسم الشكل الذي يبين انتشار قيم المتغيرين؟

2- أوجد معادلة الانحدار الاستهلاك والدخل حيث $C = a + by$.

3- أحسب معامل الارتباط بين قيم المتغيرين الاستهلاك والدخل.

4- إذا علمت أن قيمة الدخل في سنة 2016 هو 14فما قيمة الاستهلاك في نفس السنة؟.

التمرين رقم02:

تشير قيم الجدول التالي إلى علامات 12 طالبا في الاختبار الاول والاختبار الثاني :

الاختبار الاول	18	14	10	15	7	12	13	8	9	17	15	12
الاختبار الثاني	20	11	14	16	10	14	17	11	12	20	18	12

1 – أرسم الشكل الذي يبين انتشار قيم المتغيريين.

2– اوجد معادلة الانحدار $Y=a+bx$ ؟

3–طالب في الامتحان الأول 16 ماهي العلامة التقديرية التي يحصل عليها في الامتان الثاني؟.

التمرين رقم 03:

إذا كانت لدينا قيم المتغير الإحصائي T و الذي يمثل معدلات الفائدة المتعلقة بالإدخار للصندوق الوطني للتوفير والاحتياط للفترة 2006 –2017.

حيث :

السنوات	معدل الفائدة
2006	5
2007	5.5
2008	5.5
2009	6
2010	6
2011	6.4
2012	4
2013	6
2014	6.4
2015	6
2016	7
2017	7

المطلوب:

1- إيجاد قيمة المعدل التقديرية في سنة 1998 بدلالة الزمن (السنوات).

2- ماهي الملاحظة لو كانت قيم المتغير المستقل هي:

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12؟.

الفصـل الثالث

الانحدار الخطي المتعدد

الفصل الثالث : الانحدار الخطي المتعدد

1.3 تمهيـــــد

في الواقع الاقتصادي، لا يمكن الاستعانة بالنموذج ذي متغيرين لتحليل الظاهرة الاقتصادية حيث أن هذه الأخيرة لا تفسَّر فقط بمحدد واحد و إنما ينبغي إدماج جميع المحددات أو العوامل المؤثرة في الظاهرة لكي تكون الدراسة أكثر شمولية، ويعد الانحدار الخطي المتعدد من الأساليب الإحصائية المتقدمة والتي تضمن دقة الاستدلال من أجل تحسين نتائج البحث عن طريق الاستخدام الأمثل للبيانات في إيجاد علاقات سببية بين الظواهر موضوع البحث .

في هذا الفصل، نقوم بدراسة الانحدار العام و ذلك بعرض طريقة لتقدير معالم النموذج و دراسة الخصائص الإحصائية للمقدرات ثم اختبار الفرضيات.

2.3 عرض نموذج الإنحدار الخطي المتعدد:

الانحدار الخطي المتعدد هو عبارة عن انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ لذا فهو يستخدم في التنبؤ بتغيرات المتغير التابع الذي يؤثر فيه عدة متغيرات مستقلة أي تعتمد فكرته على العلاقات الدلالية التي تستخدم ما يعرف بشكل التشتت أو الانتشار ، فبإمكاننا التنبؤ بالمستوى الرقمي في فعالية رمي المطرقة على سبيل المثال اعتماداً على دراسة حالات أخرى للرامي كالعمر الزمني والعمر التدريبي والمهارة والمواصفات الجسمية وغيرها .

إن الانحدار الخطي المتعدد ليس مجرد أسلوب واحد وإنما مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها لمعرفة العلاقة بين متغير تابع مستمر وعدد من المتغيرات المستقلة التي عادةً ما تكون مستمرة)

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ وحد عشوائي ε_i ، ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لn من المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة بالشكل الأتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n ..... (1)$$

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الأتي :

$$i=1: Y_1=\beta_0+\beta_1X_{11}+\beta_2X_{12}+.....+\beta_kX_{1k}+\varepsilon_1$$
$$i=2: Y_2=\beta_0+\beta_1X_{21}+\beta_2X_{22}+.....+\beta_kX_{2k}+\varepsilon_2$$
$$.....$$
$$i=n: Y_n=\beta_0+\beta_1X_{n1}+\beta_2X_{n2}+.....+\beta_kX_{nk}+\varepsilon_n$$

بصفة عامة ،يكتب نموذج الانحدار الخطي المتعدد كما يلي :

$$Y=X\alpha+\varepsilon.....(4.7)$$

$$Y=\begin{pmatrix} y1\\ y2\\ \vdots\\ yt\\ \vdots\\ yn \end{pmatrix};\ x=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1}\\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_{1t} & x_{2t} & \cdots & x_{kt}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix};\ \alpha=\begin{pmatrix} \alpha0\\ \alpha1\\ \alpha2\\ \vdots\\ \alpha k \end{pmatrix};\ \varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon1\\ \varepsilon2\\ \vdots\\ \varepsilon t\\ \vdots\\ \varepsilon n \end{pmatrix}$$

(n×1) (n×(k+1)) ((k+1) ×1) (n×1)

حيث :

Y : شعاع يضم n مشاهدة للمتغير الداخلي للنموذج y_t (أو المتغير المفسر بواسطة النموذج).

X : مصفوفة المتغيرات الخارجية للنموذج . كل عمود من المصفوفة هو عبارة عن متغير مفسر ، أما العمود الأول من المصفوفة X ،و الذي يتكون من القيم 1، يتوافق من المعامل α_0 (معامل الحد الثابت).

α : شعاع المعلمات الواجب تقديرها وعددها يساوي (k+1) لان النموذج يضم k متغير مفسر + الحد الثابت α_0 .

ε :شعاع الأخطاء العشوائية ، فهذه الأخطاء تأخذ بعين الاعتبار حقيقة أن العلاقة بين المتغير الداخلي ومختلف المتغيرات المفسرة ليست دقيقة.

n : عدد المشاهدات .

K :عدد المتغيرات المفسرة الحقيقية ، أي مع استبعاد الحد الثابت .

وبما أن المعادلة (1) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ...,,..., X_k$ ، فإنه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة ب ε_i التالية.

3.3 الفرضيات التي يقوم عليها نموذج الإنحدار الخطي المتعدد:

إن بناء نموذج الانحدار الخطي يجب أن يكون مستوفيا لعدد من الفرضيات التي يمكن إجمالها كما يلي:

- الفرضية الأولى: المتغيرات المُفَسِّرة المهملة في النموذج لها أثر متوسط معدوم $E(\varepsilon)=0$.

$$E(\varepsilon_i)= E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1)\\ E(\varepsilon_2)\\ .\\ E(\varepsilon_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

- الفرضية الثانية :

$$\begin{cases}\text{var}(\varepsilon_i)=\sigma^2, & \forall i=1.....n\\ \text{cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & \forall i\neq j\end{cases}$$

حيث أن $\text{var}(\varepsilon_i)=\sigma^2 \quad \forall i=1.....n$ هي فرضية تجانس التباين "Homoscedasticity" لمختلف الحدود العشوائية، وهذا كفيل بإبعاد الحالة التي تكون فيها الأخطاء تتبع تغيرات قيم المتغيرات المفسرة و $Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \quad \forall i\neq j$، أي أن الأخطاء ليست مرتبطة ببعضها، وأن نتيجة تجربة لا تؤثر على بقية النتائج. يمكن كتابة هاتين الفرضيتين على الشكل المصفوفي :

$$E(\varepsilon\varepsilon')= E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon 2 & \dots & \varepsilon_n\end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ . & . & . & .\\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n^2\end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon'\varepsilon)=\begin{bmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & .... & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ . & . & ..... & .\\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_n^2)\end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \text{var}(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ . & . & .... & . \\ Cov(\varepsilon_n\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon^2{}_i) = \sigma^2 \\ \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1{}^2 = \sigma^2{}_2 = \sigma^2 = ...\sigma^2{}_n$:??? حيث

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

تسمى المصفوفة Ω_ε مصفوفة التباينات– التباينات المشتركة للأخطاء.

- الفرضية الثالثة: المصفوفة X غير عشوائية وثابتة: تعني بأن قيم المتغيرات المستقلة يمكن مراقبتها، وبالإضافة إلى ذلك نفترض X ثابتة لضمان بأن قيم المتغيرات المستقلة لا تتغير من حين لآخر، أي ;

$$\text{cov}(X, \varepsilon) = E(X'\varepsilon) = 0$$

- الفرضية الرابعة: عدد المشاهدات n هو أكبر من عدد المتغيرات المفسرة k ، وهي الحالة التي تلغي الارتباط الخطي بين المتغيرات المستقلة.

4.3 تقدير شعاع المعالم $\hat{\beta}$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)

في النموذج $Y = X\beta + \varepsilon$، المجاهيل الوحيدة هي β و ε، المصفوفة X و الشعاع Y هي معطيات النموذج، ويجب الإشارة إلى أن شعاع الأخطاء غير مشاهد ولذلك حتى معرفة قيمة β لا تسمح للمتغيرات المستقلة بإعطاء القيمة الحقيقية لـ Y بالضبط.

بين القيمة $\hat{\varepsilon}_i$ الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف β وتهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع Y والقيمة الحقيقية $\hat{Y}$ المقدرة.

$$\Rightarrow \quad \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} & Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \\ & \hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1.....n \\ & Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = Min\left(Y - \hat{Y}\right)'\left(Y - \hat{Y}\right) = Min\,\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} \end{aligned}$$

نسمي : $\Gamma\left(Y, X, \hat{\beta}\right) = \left(Y - \hat{Y}\right)'\left(Y - \hat{Y}\right) = \hat{Y}'\hat{Y} - 2\hat{Y}'Y + Y'Y = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'X'Y + Y'Y$

حيث: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$. ومنه الهدف هو

$$\min_{\hat{\beta}} \Gamma\left(Y, X, \hat{\beta}\right)$$

وإذا كان $\hat{\beta}$ موجود فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial\Gamma\left(Y, X, \hat{\beta}\right)}{\partial\hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0$$

ومن خلال التعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على :

وبما أن رتبة (X) هي $k+1$ فإن : $(X'X)$ مصفوفة مربعة $((k+1)\times(k+1))$ رتبتها $k+1$ وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$.

ومنه: $2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0 \quad \Rightarrow (X'X)\hat{\beta} - X'Y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(X'X)^{-1}$ لنحصل على : $\boxed{\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y}$ وهو تقدير لـ β .

وللتأكد من أن $\hat{\beta}$ المتحصل عليه هو قيمة دنيا لـ $\sum e_i^{\,2}$ ، يجب تحقيق الشرط من الدرجة الثانية:

$\dfrac{\partial^2\sum e_i^{\,2}}{\partial\hat{\beta}'\partial\hat{\beta}} = (X'X) > 0$ وهي مصفوفة موجبة معرفة ومنه فإن $\hat{\beta}$ هو نهاية صغرى.

المصفوفة $(X'X)$ هي على الشكل التالي:

$$(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^{\ 2} & \sum X_{1i}X_{2i} & \dots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{1i} & \sum X_{ki}X_{2i} & \dots & \sum X_{ki}^{\ 2} \end{bmatrix}$$

المصفوفة $(X'Y)$ هي على الشكل التالي:

$$(X'Y)=\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum Y_i X_{ki} \end{bmatrix}$$

5.3 الخصائص الإحصائية للمعالم المقدرة:

1.5.3 تقدير تباين الأخطاء σ^2 و مصفوفة التباين–التباين المشترك للمقدرات $\Omega_{\hat{\beta}}$:

إحدى فرضيات النموذج هي $E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega_\varepsilon = \sigma^2 I_n$ وبما أن σ^2 غير معروف، فينبغي تقديره:

$$\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta} = X\beta + \varepsilon - X\hat{\beta} = \varepsilon - X(\hat{\beta} - \beta) = \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'\varepsilon = (I_n - X(X'X)^{-1}X')\varepsilon$$

نضع : $M_X = (I_n - X(X'X)^{-1}X')$ ، حيث M_X تسمى *المصفوفة الدورية* أي :

$$M_X = M_X' M_X = M_X^2 = M'$$

بالإضافة إلى ذلك :

$$M_X X = 0$$

ومنه: $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = \varepsilon' M_X' M_X \varepsilon$ أي : $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = \varepsilon' M_X \varepsilon$

ندخل التوقع الرياضي على الطرفين : $E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = E(\varepsilon' M_X \varepsilon)$

ويجب الملاحظة أن أثر $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$ يساوي أثر $\varepsilon' M \varepsilon$ ، ونعلم أيضا أن أثر (AB)=أثر (BA).

يكون لدينا إذن : أثر $(\varepsilon' M \varepsilon)$=أثر $(\varepsilon\varepsilon' M)$

$$E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = E(\varepsilon'\varepsilon) Tr(M_X)$$

نعلم أن: $E(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2$ وعليه: $E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = \sigma^2 \{Tr(I_n) - Tr(X(X'X)^{-1}X')\}$

ومنه :

$$E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = \sigma^2(n-k-1)$$

حيث : $Tr(I_n) = n \quad Tr(X(X'X)^{-1}X') = k+1$;

لكي نحصل على تقدير غير متحيز لـ σ^2 يكفي قسمة العبارة على : $(n-k-1)$

$$E\left(\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-k-1}\right) = \sigma^2$$

في حالة الانحدار المتعدد حيث هناك $k+1$ معلم للتقدير و n عدد المشاهدات، وهذا يُعطي عدد درجات الحرية $n-k-1$، إذن :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}{n-k-1}$$

لقد برهنا أن $\hat{\beta}-\beta$ تساوي $(X'X)^{-1}X'\varepsilon$ وإحدى فرضيات النموذج هي $E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega_\varepsilon = \sigma^2 I_n$.

لدينا :

$$\hat{\beta}-\beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

نقوم بحساب $(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'$، حيث :

$$(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)' = (X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}$$

بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين، نتحصل على مصفوفة التباينات-التباينات المشتركة للمقدرات :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)') = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}X'\Omega_\varepsilon X(X'X)^{-1}$$

إذن :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$$

بما أن σ_ε^2 غير معروف، فانه يمكن استبداله بمقدر تباين الأخطاء $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ وعليه :

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$$

وبالتالي فإن **تباين** أي عنصر من عناصر $\hat{\beta}$ هوعبارة عن حاصل ضرب قيمة $\sigma_\varepsilon^{\,2}$ بما يقابلها من العناصر الواقعة على قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$، كما أن قيمة **التباين المشترك** بين أي اثنين من عناصر $\hat{\beta}$ هوعبارة عن حاصل ضرب $\sigma_\varepsilon^{\,2}$ بالعنصر المقابل لها والواقع خارج نطاق القطر للمصفوفة $(X'X)^{-1}$.

2.5.3 التوقع:

لدينا: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$.....01

و أيضا : $Y = X\beta + \varepsilon$

بتعويض قيمة Y في المعادلة 01 نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'[X\beta + \varepsilon] = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \text{.....02}$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$E(\varepsilon) = 0 \quad / \quad E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)$$

نتحصل على: $\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$

نستنتج أن $\hat{\beta}$ المحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى مقدرة غير متحيزة.

6.3 اختبار جودة التوفيق والارتباط:

1.6.3 معامل التحديد R^2 : Multiple Coefficient of determination

عندما يكون لدينا أكثر من متغير مستقل في نموذج الانحدار الخطي، ننتقل من معامل التحديد العادي (معامل الارتباط البسيط) إلى معامل التحديد المضاعف، وفي حين أن الأول يقيس العلاقة بين متغير مستقل وآخر تابع، فإن الثاني وبالإضافة إلى نفس الدور فإنه يمكن أن يدرس العلاقة الموجودة ما بين المتغير التابع Y وعدة متغيرات مستقلة مرة واحدة، ويسمى بمعامل التحديد المتعدد.كما أنه يمكن أن نبين العلاقة بين متغير مستقل وعدة متغيرات مستقلة أخرى بواسطة معامل يسمى بمعامل الارتباط المتعدد، ويستعمل عادة في اختبارات اكتشاف التعدد الخطي، حيث يعتمد عليه الباحثان Farrar–Glauber في شكل معاملات تحديد جزئية على شكل $R^2_{X_j,X_1,X_2,.....X_k}$ حيث أنه يربط ما بين المتغير المستقل X_j وبقية المتغيرات المستقلة الأخرى من غير X_j.

أما معامل التحديد المتعدد R^2 فهو يشير إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع Y بدلالة المتغيرات المستقلة المدرجة في المعادلة، ويستعمل كمقياس لجودة التوفيق في نموذج الانحدار المحتوي على k متغير مستقل، ولحسابه يمكن إتباع نفس الطريقة المستعملة في النموذج الخطي البسيط : SCT=SCE+SCR ففي النموذج ذي k متغير مستقل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \quad i = 1,...., n$$

يمكن حساب R^2 على الشكل :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2}$$

أما إذا كان النموذج لا يحتوي على ثابتة، فإن R^2 يكتب بدون تركيز المتغيرات:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{Y'Y} = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y}$$

وتتراوح قيمة R^2 بين 0 (عندما لا تُفَسِّر معادلة الانحدار أيا من التغير في Y)، و1 (عندما تقع كل النقاط على خط الانحدار).

هناك علاقة بين معامل التحديد و شعاع المقدرات:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}' X' X \hat{\beta}}{Y'Y}$$

معامل التحديد يؤول أيضا إلى العلاقة التالية:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_{i1} y_i + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2} y_i + ... + \hat{\beta}_k \sum x_{ik} y_i}{\sum y_i^2}$$

حيث : $y_i = Y_i - \bar{Y} \quad , \quad x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_j \qquad \forall j = 1.....k \; , \quad \forall i = 1.....n$

إذا كان النموذج لا يحتوي على ثابتة، فإننا نعوض شعاع المقدرات بما يساويه، أي:

إذن: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ ،

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}' X' X \hat{\beta}}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}' X' Y}{Y'Y}$$

ولكن هناك مجموعة من المشاكل نواجهها مع استعمال R^2 منها :

- أولا: كل نتائجنا الإحصائية تأتي من الفرضية القائلة بأن نموذجنا المبني في المعادلة $Y = X\beta + \varepsilon$ يكون صحيحا، ثم ليس لدينا طريقة أو قيمة إحصائية بديلة للمقارنة.
- ثانيا: إن R^2 غير حساس لعدد المتغيرات المستقلة والموجودة بالنموذج، حيث إن إضافة متغيرات مستقلة أخرى لمعادلة الانحدار لا يمكن أبدا أن تُقلل من قيمة R^2، وبالعكس فإنها يمكن أن تزيد من قيمته (لأن إضافة متغير مستقل جديد للنموذج لا يؤثر في التغيرات الكلية TSS ، بينما يزيد في قيمة الانحرافات المشروحة ESS)، ويصبح تفسير واستعمال R^2 صعبا عندما يكون النموذج بدون الحد الثابت، حيث ليس بالضرورة في هذه الحالة أن يكون محصورا بين 0 و 1.

إن الصعوبات في استعمال R^2 كمقياس لجودة التوفيق راجعة لأن هذا المعامل يعتمد على التغيرات الحاصلة في Y (المشروحة وغير المشروحة)، وبالتالي فإنه لا يأخذ بعين الاعتبار عدد درجات الحرية في أي مشكل إحصائي. ولهذا الغرض يُستعمل معامل أخر يسمى معامل التحديد المصحح $\overline{R}^2$.

فإذا كان تعريف R^2 هو: $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$ ، فإن تعريف $\overline{R}^2$ هو:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{SCR/(n-k-1)}{SCT/(n-1)}$$

حيث n : عدد المشاهدات و $k+1$: عدد المعالم المقدرة. وبتعويض بسيط نجد :

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\left(\frac{n-k-1}{n-1}\right)$$

ومن المعادلة الأخيرة أعلاه، تظهر العلاقة بين R^2 و $\overline{R}^2$ حيث أن:

1. $R^2 \geq \overline{R}^2$ إذا كانت $k > 1$
2. $R^2 = \overline{R}^2$ إذا كانت $k = 1$

إذا كان حجم العينة n كبيرا، فإن R^2 و $\overline{R}^2$ يقتربان في قيمتهما، لكن في العينات الصغيرة، إذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا بالمقارنة مع حجم العينة، فإن $\overline{R}^2$ يقل بكثير على R^2، ويمكن أن يأخذ قيما سالبة، في هذه الحالة يجب شرحه على أساس أن قيمته تساوي الصفر.

إذن $\overline{R}^2$ له مجموعة من الخصائص تجعله وسيلة قياس جودة التوفيق أفضل من R^2، فهو على الأقل يُجيب على تساؤلات بعض الباحثين حول أهمية زيادة عدد المتغيرات للنموذج، بدون التفكير في سبب ظهور هذه المتغيرات على كل حال، رغم ذلك لا يجب التفكير في أن $\overline{R}^2$ يحل كل المشاكل المتعلقة بالمقياس R^2 لجودة التوفيق، حيث أن القرار حول إمكانية ظهور بعض المتغيرات في النموذج أم لا، تبقى معتمدة على اعتبارات نظرية أخرى في القياس الاقتصادي، كما أن القيمة العددية لـ $\overline{R}^2$ تكون جد حساسة لنوع المعطيات أو البيانات المستعملة.

2.6.3 معامل الارتباط الجزئي: Partial Correlation

الارتباط الجزئي هو: العلاقة الرياضية الصافية بين متغيرين اثنين فقط مع وجود متغيرات أخرى قيد الدراسة ويمكن حساب هذه العلاقة الرياضية من خلال معامل الارتباط الجزئي.

إن الفرق بينه وبين معامل الارتباط البسيط هو أن معامل بيرسون يستخرج العلاقة بين متغيرين اثنين لأي ظاهرة بدون يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة أو لا ، بينما معامل الارتباط الجزئي لا يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة فحسب وإنما يقوم باستبعاد أثرها لكي يستخرج الارتباط الصافي بين أي متغيرين.

ليكن لدينا نموذج انحدار متكون من متغيرتين مستقلتين كالاتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1, Y):

$r_{(Y,x_1)}(X_2) = \dfrac{r_{YX1} - r_{YX2} r_{X1X2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx2})(1-r^2_{x1x2})}}$ حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

r_{YX1} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_1).

r_{YX2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_2).

r_{X1X2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (X_1, X_2).

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2, Y) :

$r_{(Y,x_2)}(X_1) = \frac{r_{YX2} - r_{YX1} r_{X1X2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx1})(1-r^2_{x1x2})}}$ حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

7.3 اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد :

يهدف هذا العنصر إلى توسيع معارفنا الأساسية لنموذج الانحدار وذلك بإجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام توزيع اختبار إحصاءه Fومقارنته باختبار t ومن ثم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد R^2 ومقارنته بمعامل التحديد المقدر المعدل $\overline{R}^2$ ، وكذلك اختبار العلاقة بين F و R^2 من خلال جدول تحليل التباين $ANOVA$ ، ثم علاقة R^2 بقيمة المتغير العشوائي $\sum e_i^2$.

1.7.3 اختبار معنوية المعالم (t) :

يستخدم اختبار t لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$في المتغير التابع y في نموذج الانحدار المتعدد يعتمد على نوعين من الفروض:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_i = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_i \neq 0$ (الفرضية البديلة) $i = 0,1,..., k$

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يمكن بيانها كما يلي :

القيمة المحسوبة: $t_c = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_i فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي: $t_c = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$، حيث يتم قبول أو رفض الفرضية H_0بمستوى معنوية $(\%\alpha)$ على أساس مقارنة t_cمع القيمة المجدولة t_tحيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

$\frac{\alpha}{2}$: مستوى المعنوية و k: عدد المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد دراسته.

إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| \leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ ففي هذه الحالة المعلمة ليس لها معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر .

إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| > t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر.

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا ($n > 30$) فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

2.7.3 اختبار فيشر F – Statistics

اختبار المعنوية العامة أو الشاملة لنموذج الانحدار يعني اختبار فيما إذا كانت مجموعة المتغيرات المفسرة تؤثر على المتغير المفسر (المتغير التابع).

اختبار الفرضيات هو كالتالي :

H_0 : $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_k = 0$ (جميع المعاملات معدومة)

H_1 : هناك معامل واحد على الأقل غير معدوم

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي :

لإجراء هذا الاختبار، يتم استخدام اختيار Ficher، وذلك بحساب الإحصائية التالية:

$$F^* = \frac{\sum_t (\hat{y}_t - \bar{y})^2/k}{\sum_t e_t^2/(n-k-1)} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$$

يتم مقارنة قيمة F^*المحسوبة مع قيمةF المجدولة عند درجات حرية تساويK و $(n-k-1)$.

- عندما تكون $|F_{Cal}| \rangle F_{Tab}$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.

- عندما تكون $|F_{Cal}| \leq F_{Tab}$ نقبل فرضية العدم (H_0)أي جميع المتغيرات التفسيرية لا تمارس أي تأثير على المتغير التابع وتكون معادلة الانحدار المقدرة غير معنوية إحصائيا.

3.7.3 مجال الثقة للمعالم :

فترات الثقة للمعلمات تعطى كما يلي :

$$P_r\left[\hat{\beta} - \hat{\sigma}_{\alpha_i} \times t_{n-2}^{\alpha/2} \leq \alpha_i \leq \hat{\beta} + \hat{\sigma}_{\alpha_i} \times t_{n-2}^{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

إذا كانت القيمة صفر (0) لا تنتمي إلى مجال الثقة عند 95%للمعامل α_i، فان هذا يعني المعامل α_i يختلف معنويا عن الصفر.

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع *Student* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\%\alpha)$ ونجدها من جدول لتوزيع القيمة المحسوبة.

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n > 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

وتصبح العلاقة السابقة كالأتي:

$$P_r\left[\hat{\beta} - \hat{\sigma}_{\alpha_i} \times Z_{n-2}^{\alpha/2} \leq \alpha_i \leq \hat{\beta} + \hat{\sigma}_{\alpha_i} \times Z_{n-2}^{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع *الطبيعي* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\%\alpha)$ ونجد من جدول التوزيع الطبيعي القيمة المجدولة.

8.3 التنبؤ باستعمال الانحدار الخطي المتعدد

لاحتساب حدود الثقة لأية مشاهدة (نقطة) من مشاهدات الانحدار للمجتمع أو بعبارة أخرى لحساب القيمة الحقيقية ل Y عند مستوى معنوية معين للمتغير المستقل في النموذج ، نفترض أن النقطة المراد تقدير حدود ثقتها هي Y_f. ولتقدير المجال الذي يمكن أن تقع فيه قيمة Y_f المقابلة لتشكيلة معينة من قيم المتغيرات المستقلة (k) يجب اشتقاق متباينة القيمة Y_f.

التنبؤ في المستقبل باستخدام نموذج الانحدار المتعدد كما يلي:

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1f} + \ldots + \hat{\beta}_K X_{kf}$$

$$\hat{Y}_f = \begin{bmatrix} 1 X_{1f} X_{2f} \dots X_{kf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_K \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1f} + \dots + \hat{\beta}_K X_{kf}$$

وباختصار : $\hat{Y}_f = C'\hat{B}$ حيث أن: $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \\ \dots\dots \\ X_f \end{pmatrix}$ شعاع التنبؤ.

09.3 مثـــــال تطبيـــــــــقي 03 :

الجدول التالي يتضمن البيانات الخاصة بالصادرات كمتغير تابع (Y) والدخل الوطني كمتغير مستقل أول (X_1) الاستثمار الأجنبي المباشر كمتغير مستقل ثاني (X_2) في إحدى الدول للفترة من : 2008 -2017.

X_2 الاستثمار الاجنبي	X_1 الدخل الوطني	Y_i الصادرات
20	3	16
24	5	18
28	6	22
21	7	22
31	8	28
28	9	27
32	11	25
36	12	30
40	13	30
40	16	32

المطلوب :

1- ايجاد ومعادلة المقدرة.

2- قدم تفسير الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة.

3- أحساب الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة.

4- أوجد معامل التحديد ثم فسره.

5- إيجاد معامل التحديد المصحح

6- اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

7- تقدير مجال الثقة معالم النموذج عند مستوى ثقة 95%.

8-اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

9-إيجاد قيمة Y_f علما أن : $X_{1f} = 17$ و $X_{2f} = 41$.

الحـــــــــل :

Y_i	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	$X_1 \times X_2$	$Y_i \times X_1$	$Y_i \times X_2$
16	**3**	**20**	**9**	**400**	**60**	**48**	**320**
18	**5**	**24**	**25**	**576**	**120**	**90**	**432**
22	**6**	**28**	**36**	**784**	**168**	**132**	**616**
22	**7**	**21**	**49**	**441**	**147**	**154**	**462**
28	**8**	**31**	**64**	**961**	**248**	**224**	**868**
27	**9**	**28**	**81**	**784**	**252**	**243**	**756**
25	**11**	**32**	**121**	**1024**	**352**	**275**	**800**
30	**12**	**36**	**144**	**1296**	**432**	**360**	**1080**
30	**13**	**40**	**169**	**1600**	**520**	**390**	**1200**
32	**16**	**40**	**256**	**1600**	**640**	**512**	**1280**
250	**90**	**300**	**954**	**9466**	**2939**	**2428**	**7814**

1*إيجاد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية والمركزة " الانحرافات".

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^{2} & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^{2} \end{bmatrix}$$

بالتطبيق العددي نتحصل على :

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 10 & 90 & 300 \\ 90 & 954 & 2939 \\ 300 & 2939 & 9466 \end{bmatrix}$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 2428 \\ 7814 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \begin{bmatrix} 10 & 90 & 300 \\ 90 & 954 & 2939 \\ 300 & 2939 & 9466 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 250 \\ 2428 \\ 7814 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 9.840 \\ 0.791 \\ 0.267 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_i = 9.840 + 0.971X_{1i} + 0.267X_{2i}$$

2*شرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة .

تشير التقديرات إلى وجود علاقة طردية بين الصادرات (Y) والدخل الوطني (X_1) فكل زيادة في الدخل الوطني بمقدار وحدة واحدة تزداد الصادرات (Y) ب 0.791 وحدة مع ثبات الاستثمار الأجنبي المباشر (X_2) .

كما تشير المعادلة إلى وجود علاقة طردية بين الاستثمار الأجنبي المباشر (X_2) والصادرات (Y) فزيادة الاستثمار الأجنبي المباشر (X_2) بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الصادرات (Y) ب 0.267 وحدة مع ثبات أثر الدخل الوطني (X_1).

نتائج السابقة موافقة للنظرية الاقتصادية لأن النظرية الاقتصادية تشير إلى علاقة طردية بين الدخل الوطني و الاستثمار الأجنبي المباشر من جهة والصادرات من جهة أخرى.

3* حساب الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة .

$$\boxed{Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix} \Omega_{\hat{\beta}}$$

لدينا : $\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1}}$ و $\sigma_e^2 = \dfrac{\sum e^2_i}{n-k-1}$

إيجاد $\sum e^2_i$:

لدينا : $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = 260$$

$$SCE = \sum_I \left(\hat{Y} - \bar{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}' X'Y - n\bar{Y}^2 = 225$$

$$SCR = \sum e^2_i = SCT - SCE = 35$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e^2_i}{n-k-1}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{35}{10-2-1} = 5$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 (X'X)^{-1} = 5 \begin{bmatrix} 10 & 90 & 300 \\ 90 & 954 & 2939 \\ 300 & 2939 & 9466 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = 19.674 \qquad \sigma_{\hat{\beta}0} == \sqrt{19.674} = 4.435$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right)=0.233 \qquad \sigma_{\hat{\beta}1} == \sqrt{0.233}=0.483$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right)=0.071 \qquad \sigma_{\hat{\beta}2} = \sqrt{0.071}=0.268$$

4*إيجاد معامل التحديد مع التفسير .

$$R^2=\frac{SCE}{SCT}=\frac{SCT-SCR}{SCT}=\frac{\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}=\frac{225}{260}=0.86$$

أو :

$$R^2=1-\frac{SCR}{SCT}=1-\frac{35}{260}=0.86$$

التفسير : الصادرات (Y) مفسرة بـ : 86% عن طريق الدخل الوطني (X_1) و الاستثمار الأجنبي المباشر (X_2) وتبقى 14% تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء إرتكبناها أثناء القياس ، على العموم هو هامش قليل جدا دلالة على قوة النموذج التفسيرية.

5*إيجاد معامل التحديد المصحح .

$$\bar{R}^2=\left[1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

$$\bar{R}^2=\left[1-(1-0.86)\frac{10-1}{10-2-1}\right]$$

$$\bar{R}^2=0.82$$

6* اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية α = 5% .

- **اختبار معنوية ميل الدخل الوطني عند مستوى معنوية α = 5% .**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0:\beta_1=0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1:\beta_1\neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

حيث أن: $t_C=\dfrac{\left|\hat{\beta}_1-\beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.791}{0.483} = 1.637$$

مقارنة t_c مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي:

$t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في النموذج .

$t_{t=}t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} = t_{7,0.025} = 2.365$.

نلاحظ أن $|t_c| \prec t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليسس لها معنوية إحصائية فهو لا يختلف معنويا عن الصفر أي أن الدخل الوطني لا يؤثر على الصادرات.

- **اختبار معنوية ميل الاستثمار الأجنبي المباشر عند مستوى معنوية α = 5% .**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_c وتساوي :

حيث أن: $t_c = \frac{|\hat{\beta}_2 - \beta_2|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_2 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}2}} = \frac{0.267}{0.268} = 4.996$$

مقارنة t_c مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي:

$t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في النموذج .

$t_{t=}t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} = t_{7,0.025} = 2.365$.

نلاحظ أن $|t_c| \prec t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليس لها معنوية إحصائية فهو لا يختلف معنويا عن الصفر أي أن الاستثمار الأجنبي المباشر لا يؤثر على الصادرات.

- **اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية 5% = α .**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن: $t_C = \dfrac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_0 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{9.84}{4.43} = 2.22$$

مقارنة t_C مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$

حيث أن:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

$t_{t=}t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} = t_{7,0.025} = 2.365$.

نلاحظ أن $|t_c| \prec t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليس لها معنوية إحصائية فهو لا يختلف معنويا عن الصفر .

7* تقدير مجال الثقة معالم النموذج عند مستوى ثقة 95%.

لدينا :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_2 = \left[\beta_2 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\beta}3}, \hat{\beta}_3 + tn-3,\frac{\alpha}{2}\sigma_{\hat{\beta}3}\right]$$

$$\beta_0 \in [-0.63 \quad 20.31]$$

$$\beta_1 \in [-0.35 \quad 1.93]$$

$$\beta_2 \in [-0.36 \quad 0.90]$$

- هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_0 بين الحدين الأعلى 20.31 والأدنى 0.63-، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_1 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 1.93 والأدنى 0.35- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_2 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 0.90 والأدنى 0.36- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

8*اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالأتي:

الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F = \frac{SCE/k}{SCR/(n-k-1)} \sim F_{(k,n-k-1)}$$

$$F = \frac{225/2}{35/(10-3)} = 22.50$$

أو : $F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0.86/2}{(1-0.86)/7} \simeq 25$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية *Fischer* في هده الحالة تعتمد على درجتي حرية 2 (في البسط) و $n-3$ (في المقام).

$$F_t = F_{k,n-k-1} = F_{(2,7)} = 4.74$$

نلاحظ أن $F_C \geq F_t$ نقبل H_1 ونرفض H_0 الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية أي أن: الدخل الوطني (X_1) والاستثمار الأجنبي المباشر (X_2) يؤثران معا في الصادرات (Y_i) .

9*إيجاد قيمة Y_f **علما أن :** $X_{1f} = 17$ و $X_{2f} = 41$.

$$\hat{Y}_f = \begin{bmatrix} 1 X_{1f} X_{2f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1f} + \hat{\beta}_2 X_{2f}$$

وباختصار : $\hat{Y}_f = C'\hat{B}$ حيث أن: $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ شعاع التنبؤ.

$$\hat{Y}_f = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.840 \\ 0.791 \\ 0.267 \end{bmatrix} = 34.234$$

$$\hat{Y}_f = 15.99 + 0.65 * 16.5 + 1.11 * 14 = 42.25$$

10.3 الأسئـــــلة والتمـــارين:

التمرين رقم 01 :

– برهن العلاقات التالية :

* $\Omega_{\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n$.

* $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$

* $E(\hat{\beta}) = \beta$ ماذا تستنتج ؟

* $\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1}$

– أذكر فرضيات طريقة المربعات الصغرى؟

التمرين رقم 02 :

يبين الجدول التالي حجم الناتج الداخلي المحلي والانفاق الحكومي والايرادات العامة .

الوحدة : مليار دولار

الايرادات x_2	الانفاق الحكومي x_1	الناتج المحلي Y
2	4	25.6
6	8	32.7
8	12	45.4
10	16	53.9
12	20	59.0
15	24	62.6
18	28	65
20	32	65.5

الأسئلة:

1- قدر معادلة النموذج $Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$ ، ثم قم بتفسير النموذج المقدر؟

2- احسب مجموع مربعات الأخطاء ؟.

3-احسب تباين المعالم ؟.

4-أحسب معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرات r ومعامل التحديد R مع تفسير كل منهما ؟.

5- اختبر معنوية العالم، ثم اختبر معنوية النموذج كليا ؟.

التمرين رقم 03 :

الجدول التالي يحتوي على مشاهدات عن المبيعات من سلعة معينة (Y) و نقاط البيع (X_1) و سعر السلعة (X_2) كما في الجدول التالي:

المبيعات Y	الانفاق الحكومي x_1	الايرادات x_2
100	2	8
140	4	7
186	5	6
214	7	5
266	8	4
310	11	3
325	13	2
375	15	1

الأسئلة:

- قدر معادلة النموذج $Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$ ، ثم قم بتفسير النموذج المقدر؟

- احسب مجموع مربعات الأخطاء $\sum_{i=1}^{n} e^2$ ؟.

-احسب تباين المعالم والانحراف المعياري ؟.

-معامل التحديد R^2 مع تفسير ؟.

- اختبر معنوية كل من المعالم ؟

- ثم اختبر معنوية النموذج كليا ؟.

- أوجد قيمة Y_f علما أن : $X_{1f} = 17$ و $X_{2f} = 9$.

التمرين رقم 4 :

يبين الجدول التالي معطيات لمجموعة من المتغيرات خلال الفترة 200-2015 في الجزائر :

السنوات	الناتج الداخلي الخام Y	اجمالي العمالة x_1	معدل البطالة x_2
2006	4227.1	6400	27.3
2007	4522.8	6550	23.7
2008	5252.4	6684	25.5
2009	6150.4	6980	17.7
2010	7561.9	7232	17
2011	8514.7	8868	12.3
2012	9366.6	8594	13.8
2013	11090	9146	11.3
2014	10034.3	9472	10.2
2015	12049.4	9735	10

المطلوب:

- ما هو النموذج القياسي الذي يربط المتغيرات؟

- إذا كانت فرضيات طريقة المربعات الصغرى محققة، قدر معالم نموذج

- قدم تفسيرا اقتصاديا للمعالم المقدرة؟
- قدر تباين المتغير العشوائي σ_{ε}^{2} ؟
- قدر تباين معالم النموذج؟
- قدر معالم النموذج على مجال ثقة بمعنوية $\alpha = 0.05$ ؟
- أحسب معامل التحديد R^2 ؟ماذا تستنتج ؟
- أحسب معامل الارتباط الجزئي؟
- اختبر معنوية معالم النموذج باستخدام اختبار t و F بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

الفصـل الرابع

مدخل لتحليل السلاسل الزمنية

الفصل الرابع : مدخل لتحليل السلاسل الزمنية

1.4 تمهيـــــد

إن دراسة و تحليل السلاسل الزمنية و التنبؤ بالسلوك المستقبلي لها من الموضوعات الهامة في العلوم الاقتصادي، و ذلك بسبب الحاجات المتنامية في شتى مجالات الحياة، مثل دراسة سلوك مؤشرات الأسواق المالية و التنبؤ بها في المستقبل، دراسة معدلات البطالة و التضخم، التنبؤ بمستويات استهلاك الطاقة الكهربائية .....الخ.

و يمكننا القول أن جذور هذا العلم تعود تاريخياً إلى العالم الرياضي (Fourier, 1807) و الذي يعتبر أول من تطرق إلى دراسة السلاسل الزمنية و ذلك باستعمال دوال الجيب و جيب التمام. و في عام 1927 قام العالم (Yule, 1927) باقتراح أهم نماذج السلاسل الزمنية و هو نموذج الانحدار الذاتي (Autoregressive) و نرمز له بالرمز (AR) و المتضمن لفكرة شرح و تفسير القيمة الحالية للسلسلة الزمنية بقيم السلسلة لفترات زمنية سابقة و متعاقبة (أربعة فترات على الأكثر) مضافاً إليها حد الخطأ العشوائي، و قد عمم هذا النموذج فيما بعد من طرف (Walker, 1931) عام 1931 ليشمل تأخيرات أكثر.

و في عام 1927 و ضع العالم (Slutsky, 1927) فكرة نماذج الأوساط المتحرك (Moving Average) و التي نرمز لها بالرمز (MA) و المتضمنة لتمثيل قيمة السلسلة الحالية على أساس قيم الأخطاء العشوائي للفترات السابقة.

2.4 تعريف السلسلة الزمنية:

نعرف السلسلة الزمنية لظاهرة ما على أنها مجموعة من المعطيات أو المشاهدات مأخوذة على فترات زمنية متتابعة، حيث يختلف الزمن حسب نوع الظاهرة المشاهدة، وبعبارة أخري فالسلسلة الزمنية لظاهرة معناه بيان قيم هذه الظاهرة خلال مدة معينة من الزمن وتسمى المقادير أو القيم المشاهدة للسلسلة بالقيم الفعلية أو التاريخية، وبذلك يمكن تمييز متغيرين : أحدهما مستقل وهو الزمن ويرمز له بالرمز t والأخر هو القيمة الظاهرة وهو المتغير التابع ويرمز له بالرمز X .

كما أن السلسلة الزمنية هي مجموعة من القيم لمؤشر إحصائي معين مرتبة وفق تسلسل زمني متساوي و متصاعد مثل الأيام، أسابيع، أشهر، سنوات،....الخ، بحيث أن كل فترة زمنية تقابلها قيمة عددية للمؤشر تسمى مستوي السلسلة مثل : أسعار البترول، مستويات استهلاك الطاقة،.....الخ.

كما تعرف السلسلة الزمنية على أنها:

- ✓ مجموعة من المشاهدات المرقمة و المركبة مأخوذة على فترات زمنية متابعة و طويلة نسبيا.
- ✓ مجموعة البيانات أو القيم لظاهرة ما مرتبة ترتيبا تصاعديا حسب أزمنة حدوثها و أي سلسلة زمنية تكون علاقتها الداخلية متضمنة على متغيرين أو لذا الزمن (t)وهو المتغير المستقل و ثانيها هو القيمة العددية للمؤشر المدروس $(y)_t$ وهو المتغير التابع.

تنشا السلاسل الزمنية في مجالات عدة مثل: سلاسل الصادرات في الاقتصاد، سلاسل درجات الحرارة في الأرصاد الجوية، سلسلة درجة حرارة المريض في المستشفى أو سلسلة استهلاك الكهرباء المدروسة في موضوعنا.

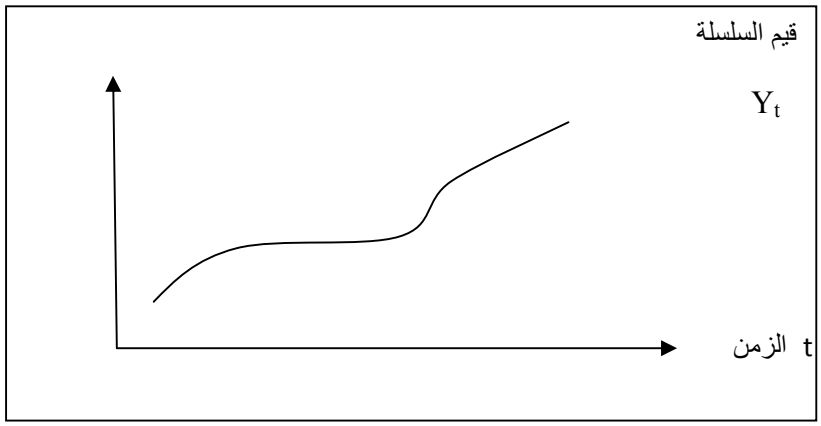
يؤدي التحليل الإحصائي للسلاسل الزمنية إلى:

- تحديد ماهية المتغيرات السابقة و الحاضرة في سلسلة زمنية
- تحديد السلوك أو توصيف المجرى لبيانات الظاهرة موضوع الدراسة
- تحديد وفصل قيمة المكونات المختلفة للسلسلة الزمنية سواء في الماضي، الحاضر أو المستقبل أي التنبؤ بالمستقبل باستعمال البيانات الإحصائية التي أخذت في الماضي
- اكتشاف الدورات التي تتكرر فيها بيانات فترةمحدودة و ذلك بعد معرفة طبيعة التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة في لمختلف الفترات الزمنية
- اكتشاف الحالات الاقتصادية الشاذة التي تحصل في زمن ما.

3.4 التمثيل البياني للسلسلة الزمنية:

اذا كانت مجموعة المشاهدات للسلسلة أزواجاً مرتبة فإنه يمكن تمثيلها بيانياً بنقط في المستوى البياني بحيث يمثل المحور الأفقي الزمن والمحور الرأسي يمثل قيم المشاهدات التي وقعت خلال الزمن ويسمى بمنحنى التطور التاريخي للسلسلة .

الشكل رقم 08 : التطور التاريخي للسلسلة



4.4 الهدف من دراسة السلاسل الزمنية:

تختلف نماذج السلاسل الزمنية عن نماذج الاقتصاد القياسي من حيث البنية و الهدف، فنماذج السلاسل الزمنية تعتمد على شرح و تفسير المتغير التابع على أساس الزمن أو سلوك نفس المتغير في الماضي. و نهدف من خلال دراسة السلاسل الزمنية إلى:

A. الكشف عن الدورات التي تتكرر في السلسلة و الحالات الشاذة فيها؛

B. معرفة سلوك السلسلة و تحديد و ضبط مسارها عن طريق النمذجة؛

C. التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة.

5.4 مركبات السلسلة الزمنية :

تتعرض أي سلسلة زمنية لنوعين من التغيرات وهذه . التغيرات يطلق عليها عناصر السلسلة:

1.5.4 مركبة الاتجاه العام:

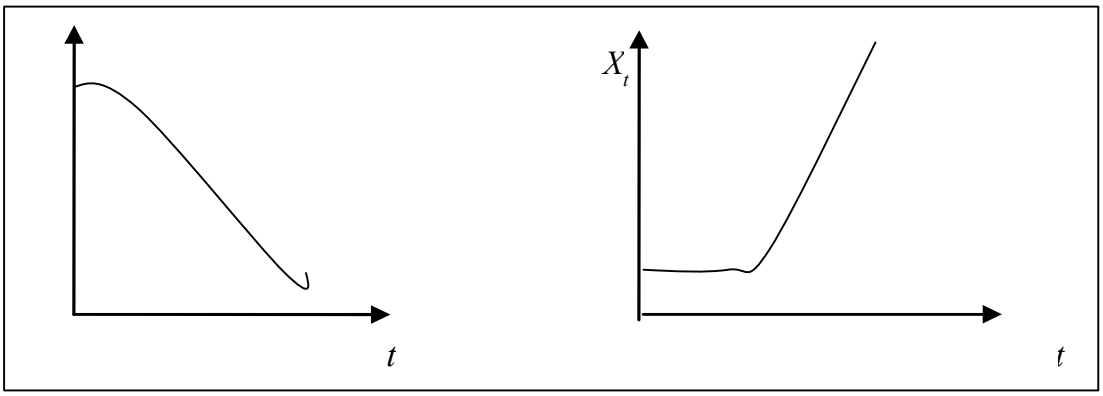
وهو العنصر الذي يقصد به الحركة المنتظمة للسلسلة عبر فترة زمنية طويلة نسبياً . ويقال إن الاتجاه العام للسلسلة موجبٌ إذا كان الاتجاه نحو التزايد بمرور الزمن ويقال إن الاتجاه العام سالب إذا اتجهت نحو التناقص بمرور الزمن .

والاتجاه العام أيضا هو النمو الطبيعي للظاهرة، حيث يعبر عن تطور متغير ما عبر الزمن، سواء كان هذا التطور بميل موجب أوسالب، إلا أن هذا التطور لا يلاحظ في الفترات القصيرة، بينما يكون واضحا في الفترات الطويلة.

ويرمز لو بالرمز T ويمكن توضيحه في الشكل البياني الآتي:

و نقصد به التطور الطبيعي للسلسلة المدروسة عبر الزمن سوءاً كان هذا التطور بالزيادة أو بالنقصان، غير أن هذه المركبة لا تظهر في السلسلة على المدى القصير بل يجب ملاحظتها على الأمد البعيد، و تعكس مركبة الاتجاه العام تأثير العوامل طويلة الأجل على السلسلة، و نرمز لها بالرمز T، و الشكل التالي يوضح حالة وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة:

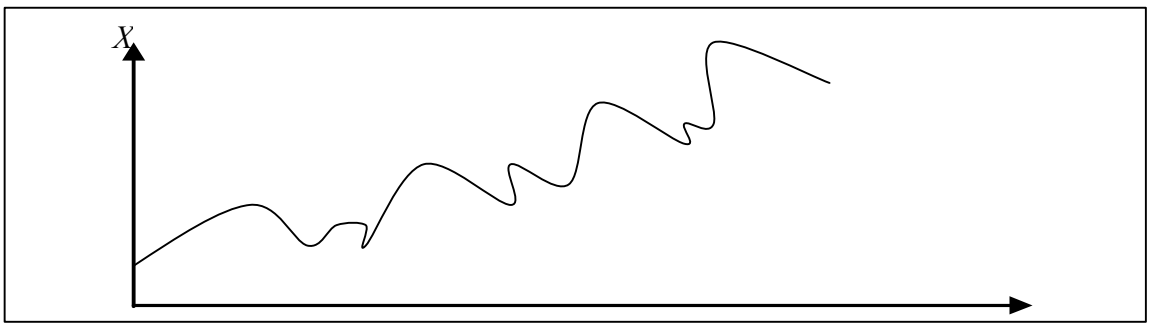
الشكل رقم 09: يمثل حالة الميل الموجب الشكل رقم 10: يمثل حالة الميل السالب



2.5.4المركبة الموسمية أو الفصلية:

هي التى تمثل التغيرات المنتظمة القصيرة الأجل والتي تحدث خلال الفترة الزمنية الواحدة التي لا يزيد طولها عن السنة ، فقد تكون أسبوعية أو شهرية أو فصلية، كما تضم المركبة الفصلية أو الموسمية كل التغيرات التي تطرأ على السلسلة في وحدات زمنية متعاقبة و قصيرة المدى و تكون في كل سنة و بانتظام، و يعزى سبب هذا التغير في السلسلة لأسباب و عوامل خارجية مثل: زيادة استهلاك المشروبات الغازية في فصل الصيف بسبب ارتفاع درجة الحرارة. و نرمز للمركبة الفصلية بالرمز S. و الشكل التالي يوضح حالة وجود المركبة الفصلية أو الموسمية ضمن السلسلة:

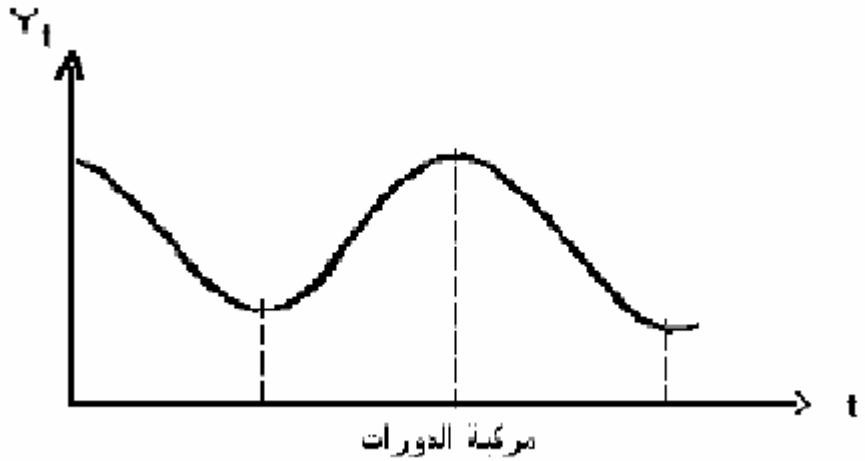
الشكل11: سلسلة تتضمن وجود المركبة الفصلية أو الموسمية



3.5.4 المركبة الدورية:

هي التى تمثل التغيرات التي تطرأ على قيم السلسلة الزمنية بصورة منتظمة ويزيد أمدها عن السنة وتتكون من دوال تشبه دوال الجيب وجيب التمام ولكن بأطوال وسعات مختلفة، وهي عبارة عن مركبة الدورة الاقتصادي، وهي تغيرات تشبه المتغيرات الموسمية إلا أنها تتم في فتَات أطول نسبيا من الفتَات الموسمية مثلا :تبين أثر النشاط الاقتصادي في المدى المتوسط، تتناسب مراحلها مع مراحل الدورة الاقتصادية، وهي تتكرر باستمرار عبر الزمن ويتَراوح عادة بين ثلاث سنوات إلى عشر سنوات. ويمكن توضيحه في الشكل البياني الآتي :

الشكل11: سلسلة تتضمن وجود المركبة الدورية



4.5.4المركبة العشوائية:

هي تعبر عن تلك التذبذبات غير المنتظمة، تتمثل في التغيرات التي لا يمكن ضبطها أو التي لا توجد لذا علاقة بعنصر الزمن، وهي ناتجة عن عوامل غير منتظرة (الزلازل إنتاج مادة معينة عند تعرض الآلة لعطب أو خلال الإضرابات أو الزلازل...إلخ)، في هذه الحالة تكون المركبة العشوائية ناتجة عن عوامل غير هامة ومستقلة ونرمز لذا بالرمز . ويمكن توضيحه في الشكل البياني الآتي:

الشكل12: سلسلة تتضمن وجود المركبة العشوائية

6.4 نموذج مركبات السلسلة الزمنية:

يتطلب تحليل السلسلة الزمنية صياغة نموذج رياضي يمثل السلسلة المعطاة . وقد طور الأخصائيون عدة نماذج رياضية تربط بين قيم المشاهدات ، وقيم المركبات المختلفة للسلسلة الزمنية . وقبل أن نذكر بعض هذه النماذج سنتفق على استخدام الرموز التالية في السلسلة الزمنية . يستخدم الرمز T ليدل على الاتجاه العام ، والرمز S ليدل على المركبة الفصلية (الموسمية) ، والرمز C ليدل على المركبة الدورية ، والرمز I ليدل على التغيرات العرضية . ومن أبرز النماذج الرياضية التي تصف السلسلة الزمنية هي النموذج الجدائي والنموذج التجمعي والمختلط.

1.6.4 الشكل الجدائي

هو النموذج الذي يفترض أن قيمة الظاهرة (المشاهدة) عند أي نقطة زمنية يساوي حاصل ضرب المركبات الأربعة أي أن :

$$Y = T \cdot S \cdot C \cdot I$$

ويستعمل هذا النموذج غالباً في الحالات التي تكون فيها المركبات S , C , I معطاة أو مطلوبة على صورة نسب مئوية ،وذلك من أجل أن تكون وحدات قياس T هي نفس وحدات قياس Y .

ومن صفات النموذج أنه يستخدم في الحالات التي يمكن أن نفرض فيها أن المركبات الأربع يؤثر بعضها فى بعض على الرغم من أن مصادر حدوثها تكون مختلفة.

ومن أمثلة السلاسل التي يصلح لها النموذج الضربي سلسلة كميات المبيعات من سلعة معينة ، لأنه يبدو أن هناك تأثيرًا واضحاً للمركبات فيما بينها .

2.6.4 الشكل التجميعي

حيث يفترض أن قيمة الظاهرة (المشاهدة) في أي نقطة زمنية هي حاصل جمع المركبات الأربعة أي أن :

$$Y = T + S + C + I$$

ويستعمل هذا النموذج إذا فرضنا أن وحدة قياس جميع المركبات متشابهة وتشابه وحدة قياس المشاهدات Y ،ويحدث ذلك أيضاً عندما نريد أن نقدر قيم المركبات لا نسبها .

وعند استعمال هذا النموذج يجب أن يكون بالإمكان فرض أن جميع المركبات مستقل بعضها عن بعض ، بمعنى أن حدوث إحداها لا يؤثر فى حدوث المركبات الأخرى .

وفي هذا النموذج يجب أن يكون مجموع قيم المركبة الفصلية على مدار السنة مساويا صفراً

3.6.4 الشكل التجميعي المختلط

تمثل بعلاقة تجميعية وجدائية في نفس الوقت بين مركبات السلسلة الزمنية (Xt) ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$X_t = Z_t \times T_t + S_t \times U_t \times Z_t$$

ويعتبر هذا الشكل الأكثر استعمالا حاليا في الاقتصاد.

4.6.4 أسلوب تحديد السلسلة الزمنية

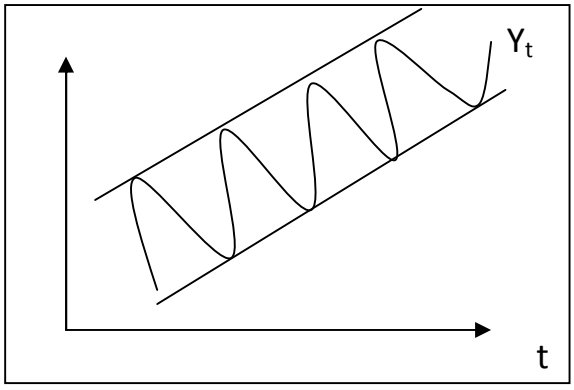
- الأسلوب البياني

إنّ الاختبار البياني ينطلق من ملاحظة المنحنى الذي يمثل تطور السلسلة الأولية والذي ينحصر بين خطين يتضمنان القيم الصغرى والقيم العظمى للسلسلة .

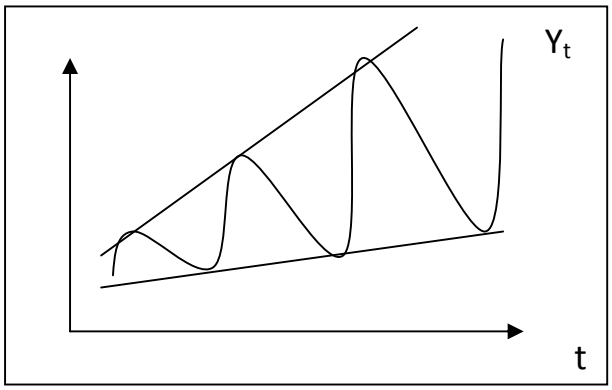
- فإذا كان هذان الخطان متوازيان السلسلة تأخذ الشكل التجميعي

- أما إذا كان العكس فان السلسلة تأخذ الشكل الجدائي(خطان منفرجان)

الشكل13: حالة نموذج الجمع



الشكل14: حالة نموذج الجداء



- الكشف الرياضي(الإحصائي)

ويسمى أيضا بالأسلوب الانحداري وهو يعتمد على تقدير المعادلة الآتية :

$\delta_i = a + b\bar{X}_i$ حيث m عدد السنوات $i = 1 \ldots . . m$

$\bar{X}_i = \frac{1}{p} X_{ij} p$ ، عدد الأشهر $pj = 1 \ldots \ldots p$

ومنه لنحصل على المعادلة الآتية : $\delta_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$

ويتم الكشف عن المركبة في هذا الفرع عن طريق تقدير المعلمة(الأسلوب الانحداري)b وفق قانون التالي:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \delta_i \bar{X}_i - m\bar{\delta}\,\bar{\bar{X}}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i^2 - m\bar{\bar{X}}^2}$$

δ_i = الانحراف المعياري لكل سنة

$\bar{\bar{X}}$ = المتوسط الحسابي لكل السنوات

$\bar{X}_i$ = المتوسط الحسابي لكل سنة

m = عدد السنوات ، وعليه يتم مقارنة بتقدير الانحدار $\hat{b}$ كآتي:

- سلسلة تجميعة إذا كان $\hat{b} < 0.05$
- سلسلة جدائية إذا كان $\hat{b} > 0.1$

- سلسلة مختلطة إذا كان $0.05 \le \hat{b} \le 0.1$

7.4 اختبارات الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية:

إن الملاحظة الأولية للتمثيل البياني للسلسلة يعطي لنا نظرة عن مركبات السلسلة و يعتبر هذا أسلوب بياني في الكشف عن مركبات السلسلة، غير أن هذا لا يكفي بل يجب التأكد من ذلك عن طريق اختبارات إحصائية و نذكر منها:

- اختبار الفروقات للكشف عن مركبة الاتجاه العام؛
- اختبار وجود المركبة الفصلية عن طريق (Krusskall-Wallis)؛

1.7.4 اختبار الفروقات

من الطرق الأكثر أهمية وهو اختبار من الاختبارات الحرة والذي ينص مبدأه على اختبار الفرضية:

H_0: عدم وجود اتجاه عام.

H_1: وجود اتجاه عام.

ويسمح لنا هذا الاختبار بالكشف عن وجود اتجاه عام للسلسلة الزمنية، وذلك عن طريق حساب الفروقات $\Delta X = X_t - X_{t-1}$

حيث X_t: تمثل قيمة للسلسلة الزمنية وفقا للزمن T.

ثم نقوم بحساب S الذي يمثل عدد الفروقات الموجبة وعندما يكون N حجم العينة أكبر من 12فإن يخضع لتوزيع طبيعي ،ذو أمل رياضي E(s) والتباين $V(S)$ ومنهنجد:

$$S \to N(E(S), V(S))$$

حيث:

$$E(S) = \frac{n-1}{2}$$

$$V(S) = \frac{n+1}{2}$$

n : تمثل عددالمشاهدات. نقوم بعدها بحساب Z كما يلي: $Z = \dfrac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}}$

ونقارن قيمة Z بالقيمة المجدولة عند مستوى المعنوية α = 5%

فإذا كان $|Z| > 1.96$ نرفض H_0 ونقول أن السلسلة تحتوي على مركبة الاتجاه العام.

وإذا كان $|Z| < 1.96$ نقبل H_0 ونقول أن السلسلة عشوائية.

2.7.4 اختبار كريستال واليس للكشف عن المركبة الموسمية

هذا الاختبار يختبر الفرضيات التالية:

H_0: عدم وجود المركبة الفصلية (تأثير الشهر و السنة).

H_1: وجود تأثير الشهر والسنة .

وتعطى علاقة هذا الاختبار في الشكل الرياضي التالي

$$KW = \frac{12}{T(T+1)} \sum_{i=1}^{p} \frac{R_1^2}{n_i} - 3(T+1) \mapsto \chi^2_{(p-1)}$$

حيث : Ri– :تمثل مجموع رتب المشاهدات المقابلة ل: i

ni– :تمثل عدد المشاهدات المقابلة ل: i

وتتبع توزي كاي تربيع χ^2 بدرجة حرية P–1.

8.4 الأسئـــــلة والتمـــارين:

التمرين رقم 01 :

الجدول التالي يمثل أعداد الحجاج في الفترة من 1407 إلى 1420 بالألف

السنة	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414
العدد	1558	1456	1628	1899	2080	1950	1943	2012
السنة	1415	1416	1417	1418	1419	1420	1421	
العدد	2502	1665	1590	1601	1619	1380	1467	

حلل هذه السلسلة حسب المركبات المؤثرة فيها.

التمرين رقم 02 :

الجدول التالي يوضح المبيعات ربع سنوية (بآلاف الريالات) لشركة الملابس الجاهزة لسنوات 2014 ، 2015 ، 2016

السنة / الربع	2014	2015	2016
الأول	250	300	300
الثاني	250	250	200
الثالث	230	250	400
الرابع	400	400	420

مثل السلسلة بيانياً وحللها إلى مركباتها المختلفة .

التمرين رقم 03 :

الجدول التالي يوضح عدد السيارات التي نقلت الحجاج في السنوات من 1407 – 1416هـ .

السنة	1407	1408	1409	1410	1411
عدد السيارات	98017	88460	92234	124108	94355
السنة	1412	1413	1414	1415	1416
عدد السيارات	122521	114732	117724	145973	122991

المطلوب :

1 – إيجاد معادلة خط الاتجاه العام.

2 – اختبر وجود مركبة اتجاع العام .

التمرين رقم 04 :

البيانات التالية توضح المبيعات ربع السنوية (بالمليون ريال **) لإحدى شركات المياه الغازية لسنوات 1999 ، 2000 ، 2001**

السنة / الربع	1999	2000	2001
الأول	10	12	13
الثاني	20	30	25
الثالث	50	80	70
الرابع	20	30	40

المطلوب :

اختبر وجود مركبة موسمية .

التمرين رقم 04 :

الجدول التالي يوضح المبيعات شهرية لمصنع انتاج لحليب في الجزائر خلال الفترة 2012-2016

الشهر/السنة	2012	2013	2014	2015	2016
جانفي	234571	179464	178836	112659	129170
فيفري	191225	153801	160337	125634	135855
مارس	222418	181281	181760	165040	188301
أفريل	191541	189924	179264	157739	184343
ماي	196828	155031	150350	131237	164836
جوان	151378	131019	140561	121171	135987
جويلية	228317	223071	224147	193383	211104
أوت	178136	151677	151789	124170	147451
سبتمبر	138220	141960	147204	123147	137127
أكتوبر	221772	193187	192756	158521	173721
نوفمبر	193530	165398	178299	157063	190458
ديسمبر	161194	165461	220397	151458	174566

المطلوب :

- حدد شكل السلسلة بيانيا ورياضيا.
- اختبر وجود مركبة الاتجاه العام.
- اختبر وجود المركبة الموسمية.

الفصـل الخامس

استخدام برنامج EVIEWS

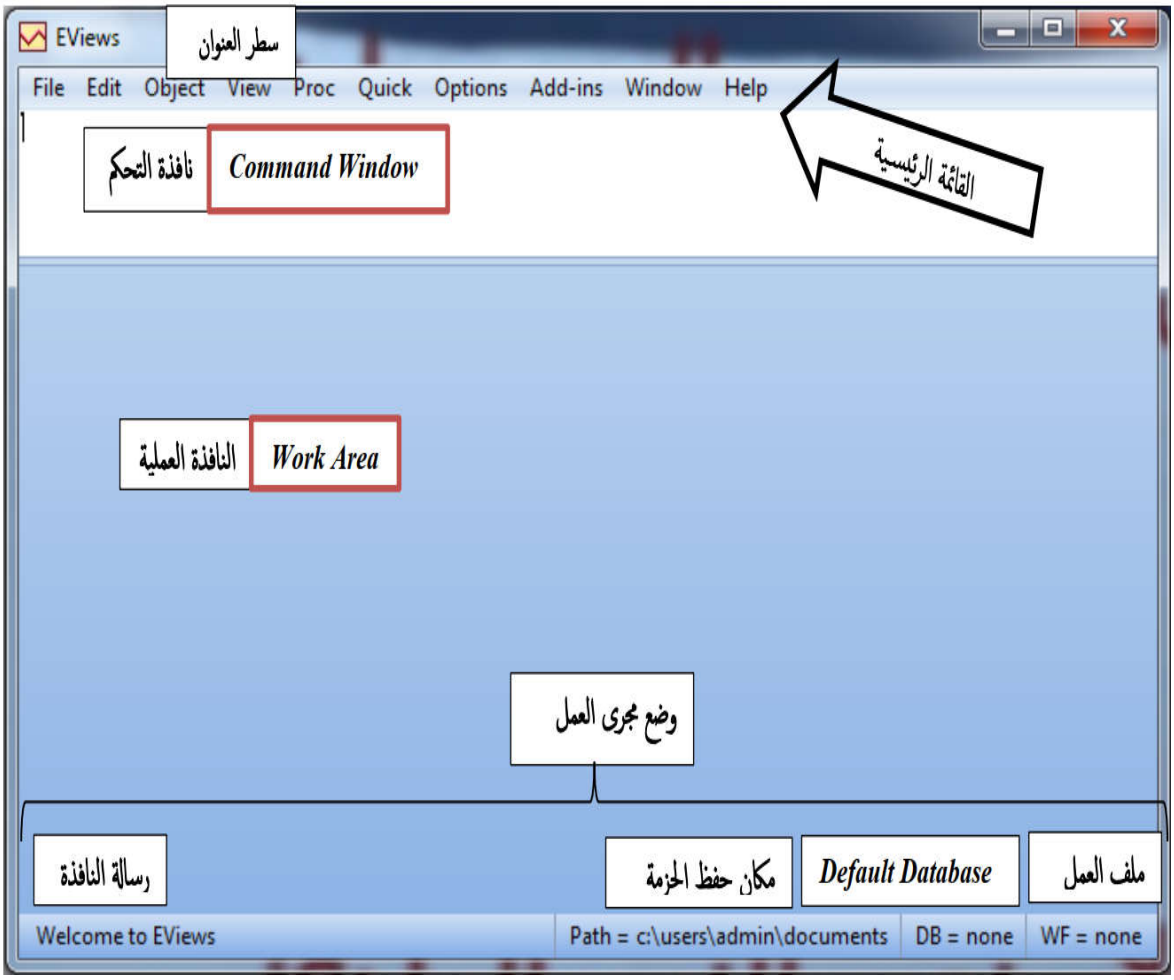
الفصل الخامس: استخدام برنامج EVIEWS

1.5 تمهيـــــد

EViews عبارة عن حزمة إحصائية لنظام التشغيل Windows ، تُستخدم بشكل أساسي للتحليل الاقتصادي القياسي الموجه نحو السلاسل الزمنية. تم تطويره بواسطة Micro Quantitative QMS Software ، وهو الآن جزء من IHS. تم إصدار الإصدار 1.0 في مارس 1994 ، واستبدل MicroTSP ، تم تطوير برنامج TSP ولغة البرمجة في الأصل بواسطة Robert Hall في عام 1965. الإصدار الحالي من EViews هو 12 ، تم إصداره في نوفمبر 2020.

وزاد استخدام برنامج EViews من قبل الباحثين حيث يستخدم في كثير من المجالات العلمية والتي تشمل على سبيل المثال العلوم الاقتصادية والإدارية والهندسية والزراعية.

والصفحة الرئيسية لهذا البرنامج موضحة في الشكل التالي:

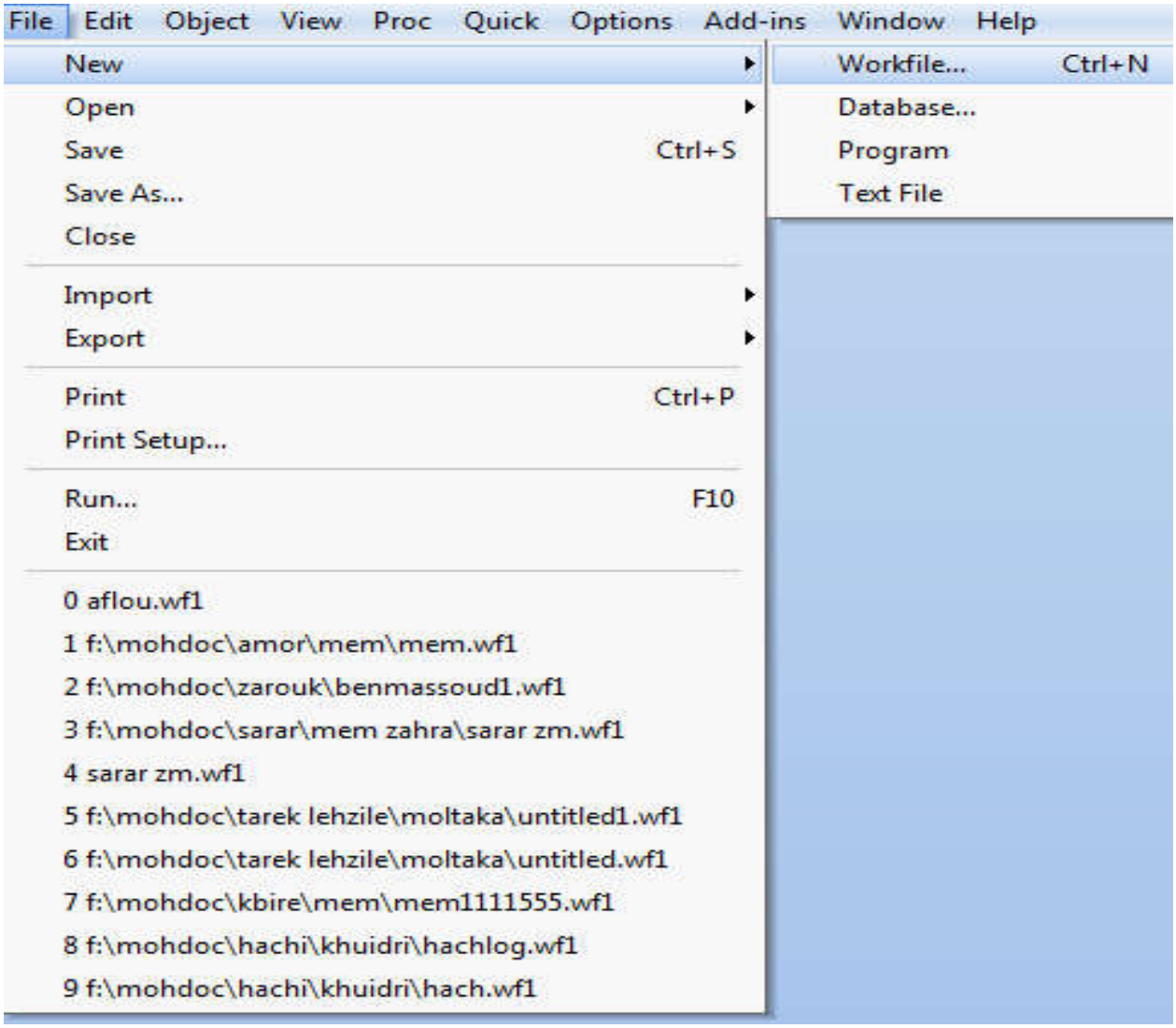


2.5 انشاء ملف في برنامج EVIEWS

الخطوة الأولى التي يجب القيام بها بعد فتح برنامجEViews هو انشاء ملف عمل يهد اجراء عمليات مختلفة على بيانات السلاسل الزمنية أو غيرها من البيانات، وذلك باختيار:

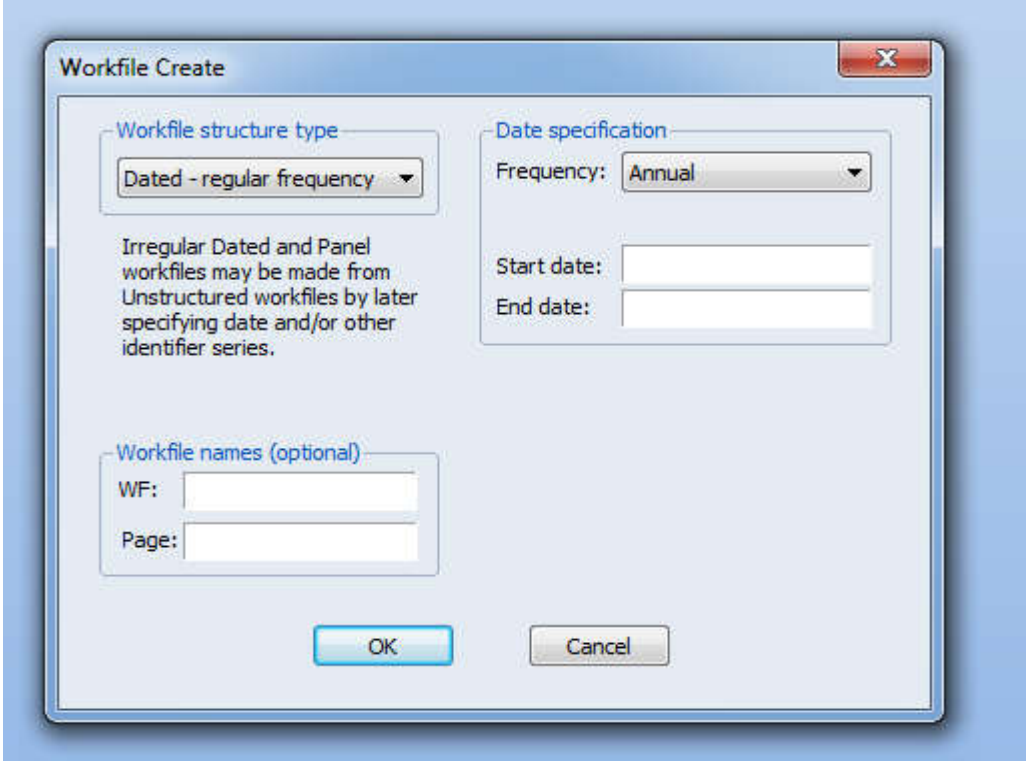
$$File \longrightarrow New \longrightarrow Workfile$$

كما هو موضح في الشكل التالي:

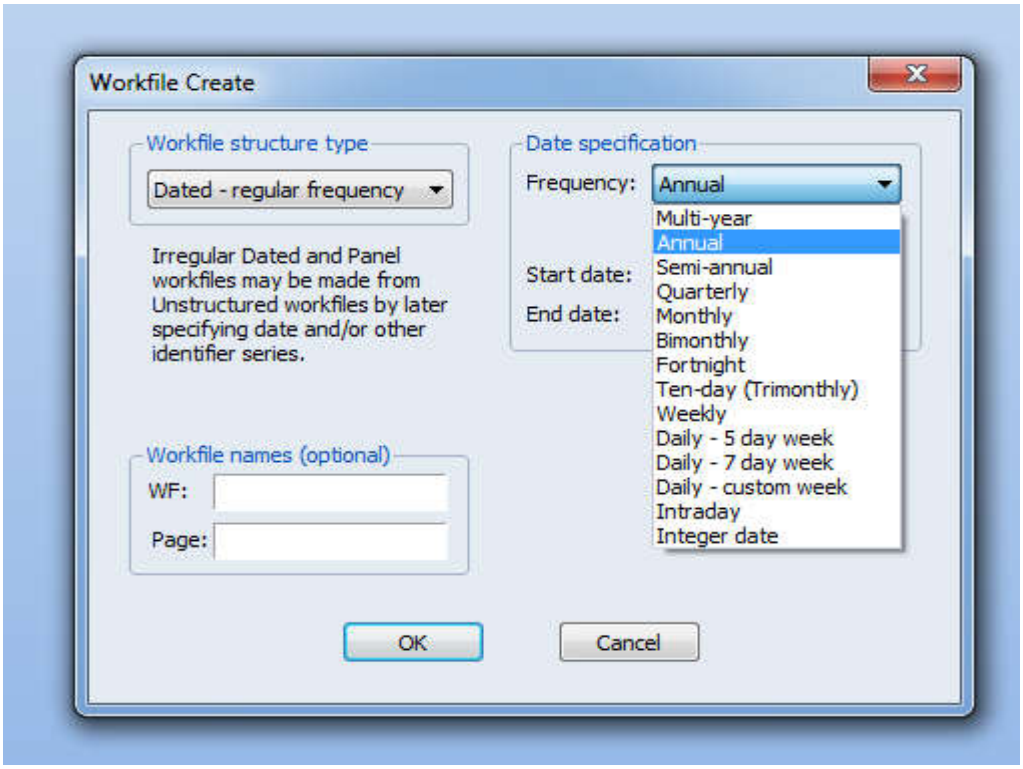


ثم نقوم بالضغط على *Workfile*.

فتظهر لنا شاشة توضح ملف الذي تريد انشاءه وذلك يعتمد على نوع البيانات التي لديك هل هي بيانات سلسلة زمنية (سنوية، نصف سنوية، ربع سنوية، شهرية، لأسبوعية، يومية) أو بيانات مؤرخة كما هو موضح في الشكل التالي:

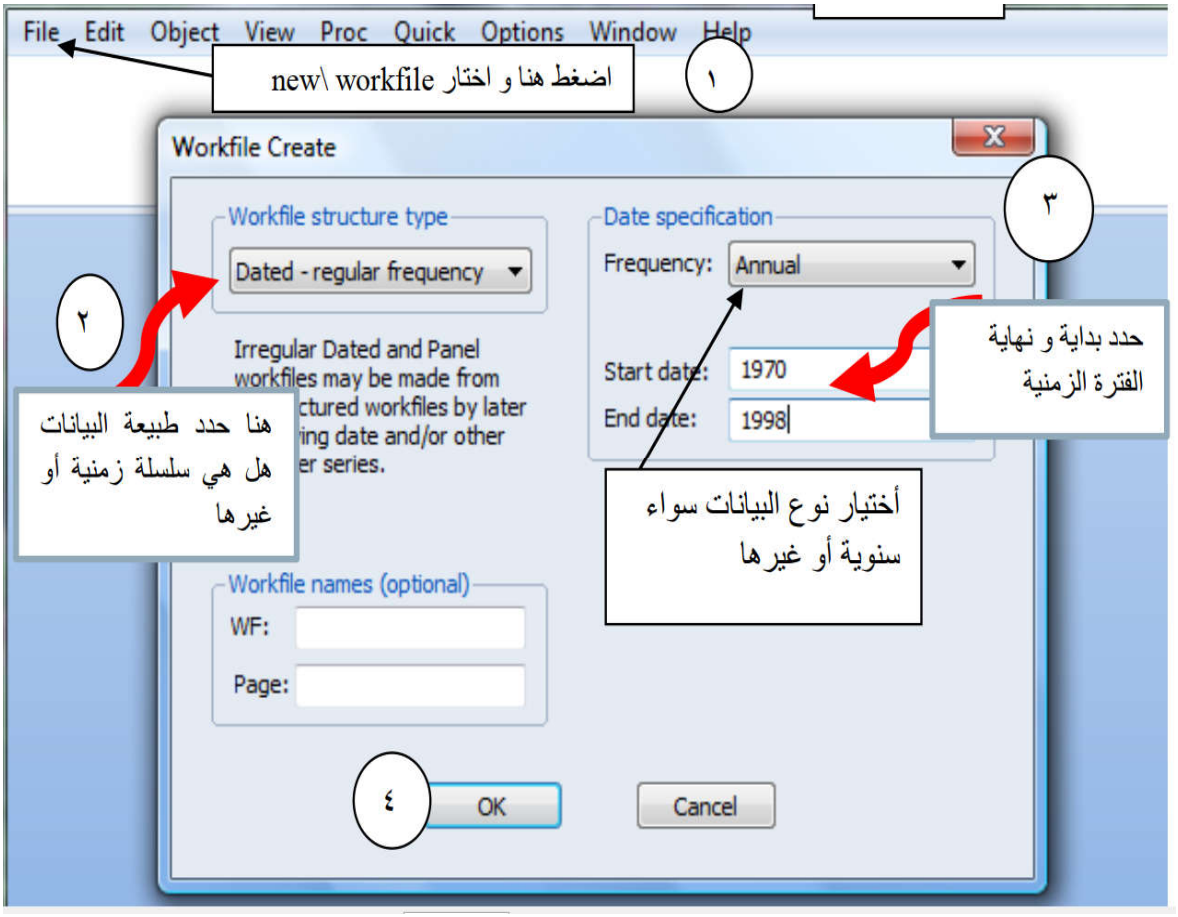


الشكل السابق يحتوي على خانتين أساسيتين وهما نقطة بداية البيانات Start date ونقطة نهاية البيانات End date ، وإذا أردنا تغيير طبيعة المعطيات نضغط على Annual فيظهر لنا:



3.5 إدخال البيانات في برنامج EVIEWS

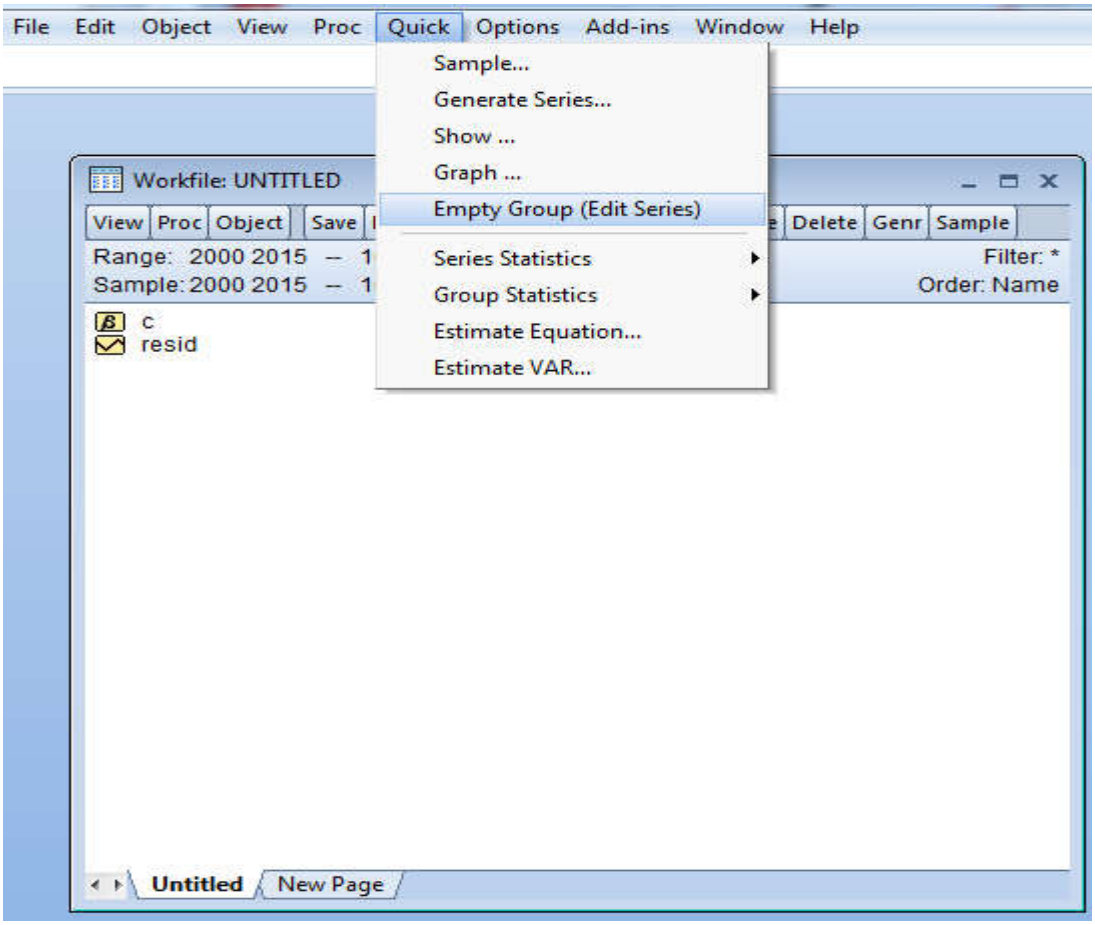
لإدخال البيانات في برنامج EViews نتبع اربعا خطوات كما هو مبين في الصورة الموالية، حيث أولا نقوم بإنشاء ملف عمل وفي الخطوة الثانية نقوم بتحديد طبيعة البيانات هل هي سلسلة زمنية او غيرها ثم نقوم باختيار نوع البيانات سواء كانت سنوية أو غيرها ثم نقوم بضغط على ok



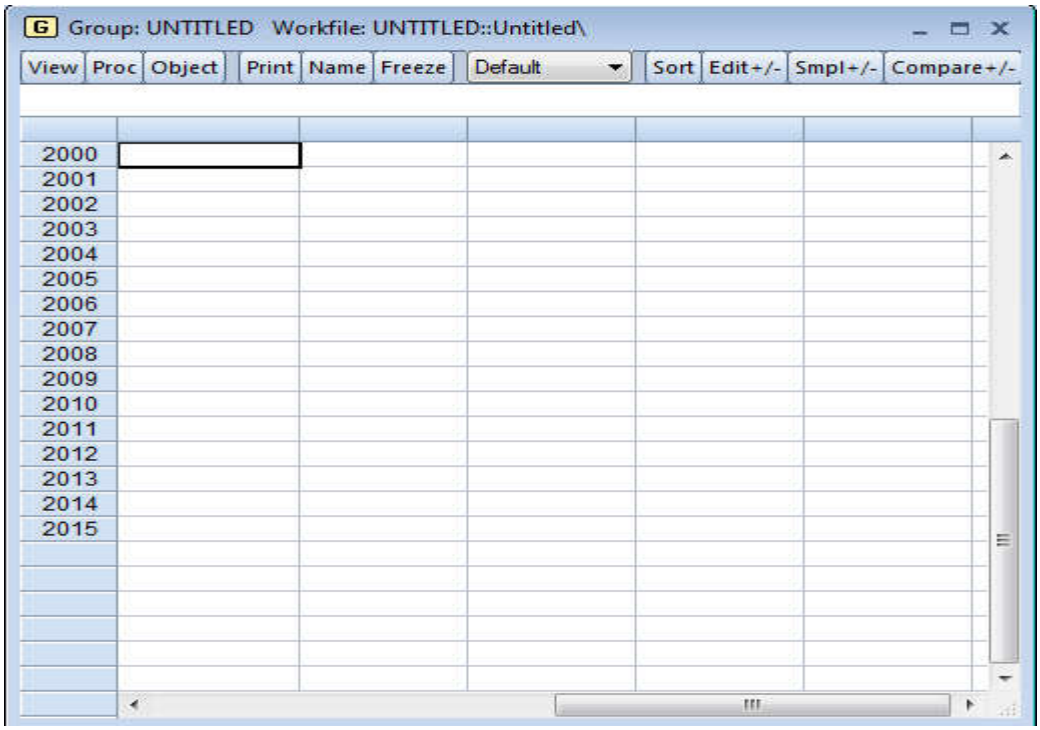
ثم نذهب إلى Qquick ثم Empty Group (Edit Series) .

$$Quick \longrightarrow Empty\ Group\ (Edit\ Series)$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



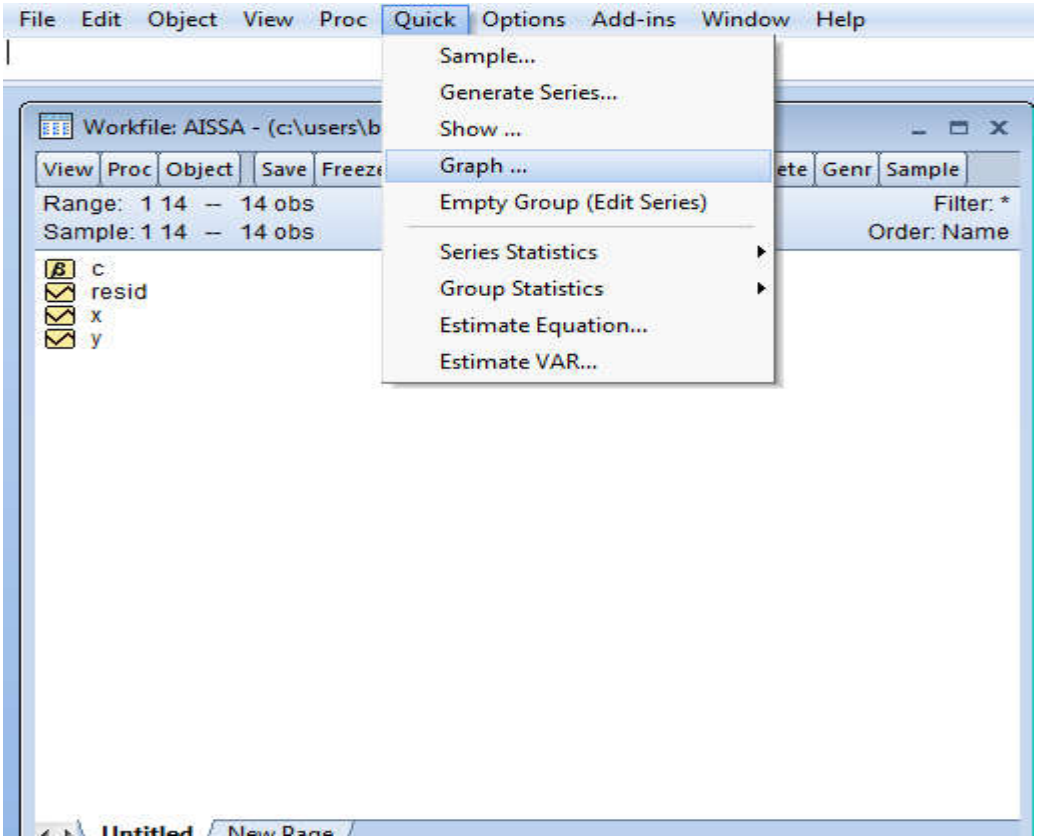
لتظهر لنا الشاشة التالية :



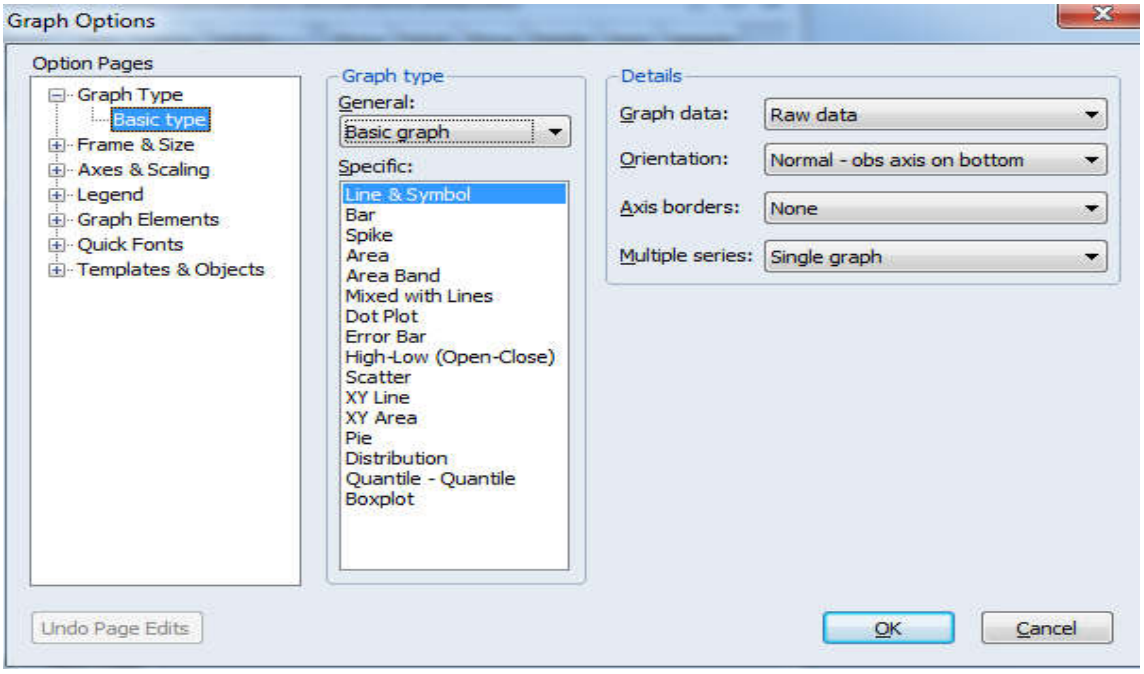
ثم نقوم بكتابة البيانات أو نسخها من أي ملف.

4.5 كيفية رسم منحنى لسلسة زمنية في برنامج EVIEWS

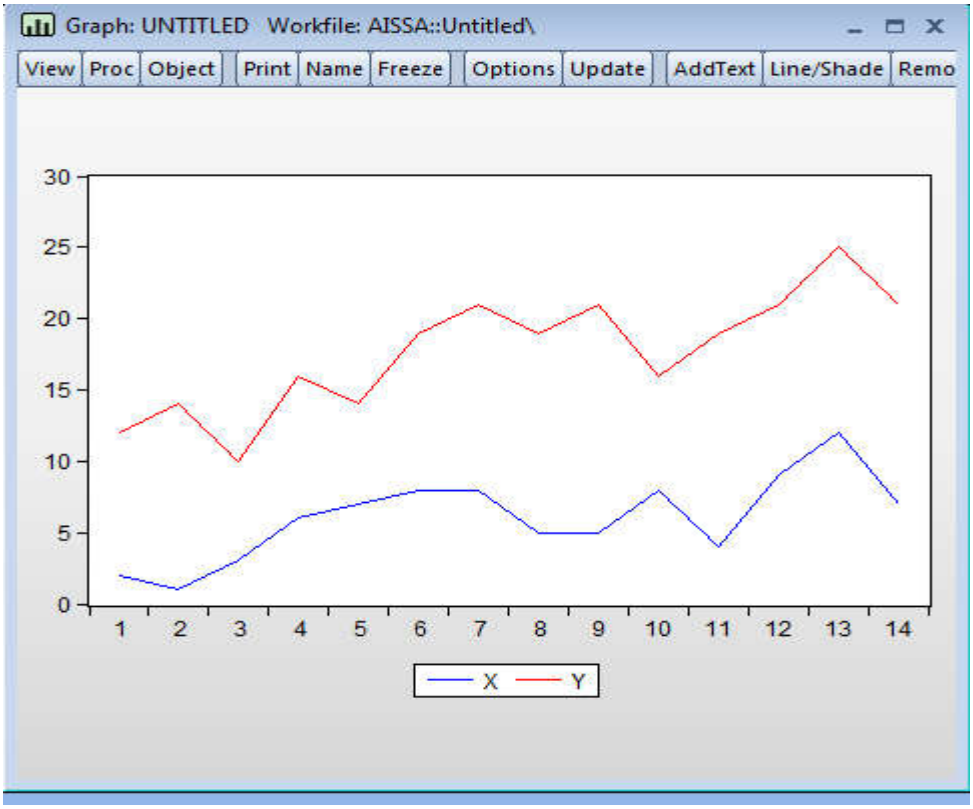
لرسم نذهب إلى شريط المهام ونختار ***Quick*** ثم ***graph*** كما هو موضح في الصورة التالية:



فتظهر لنا الشاشة التالية :

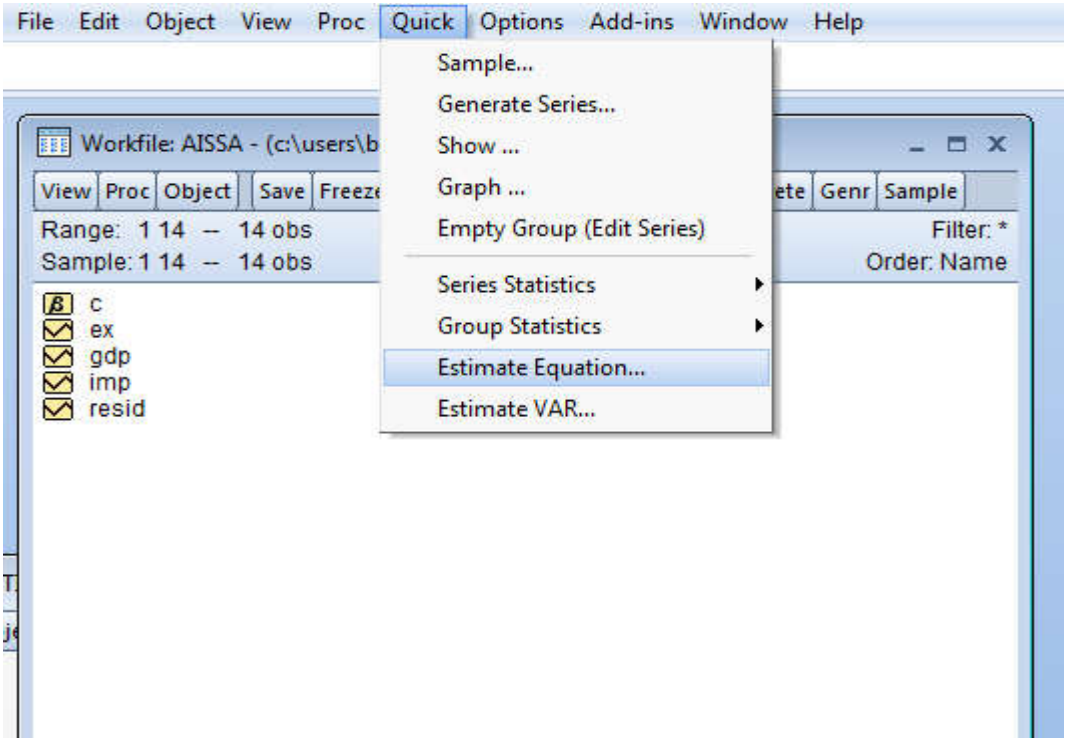


ثم نضغط على ok ليظهر لنا الرسم البياني :

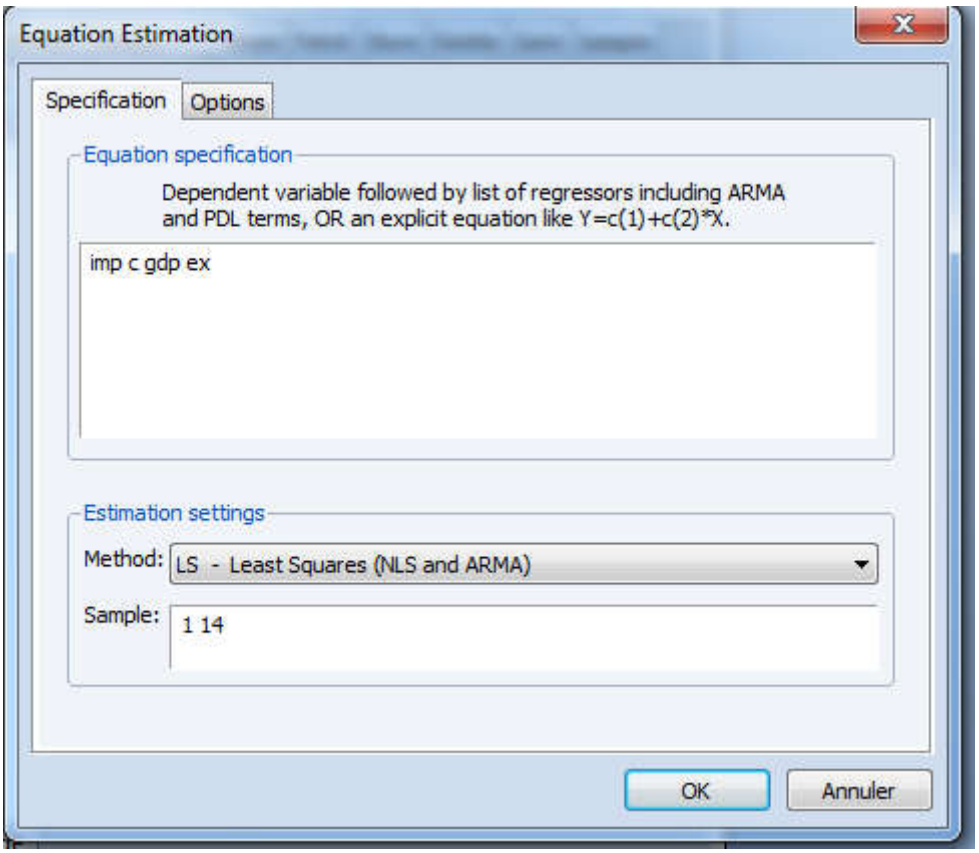


5.5 تقدير نموذج الانحدار الخطي في برنامج EVIEWS

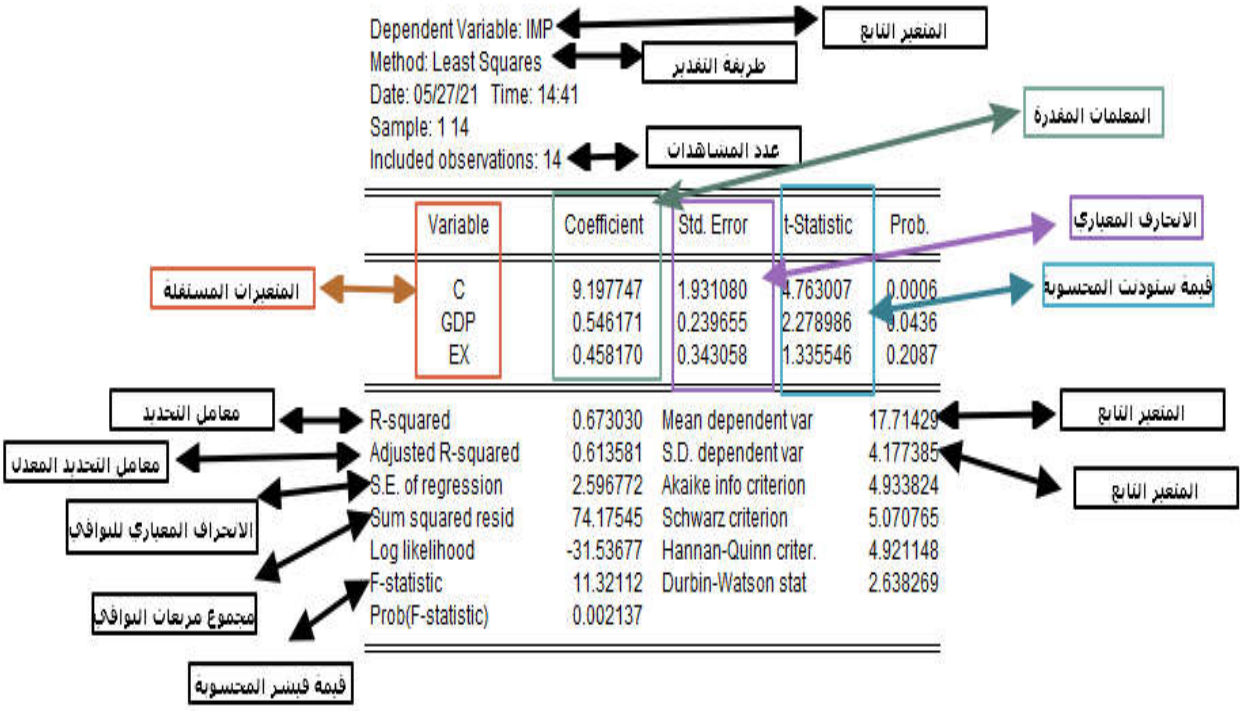
لتقدير نموذج انحدار خطي متعدد في برنامج EViews وباستخدام بيانات الواردات (imp) والناتج المجلي الاجمالي (gdp) وسعر الصرف (ex) لدولة ما نذهب إلى شريط المهام ونختار ***Quick*** ثم Estimate Equation كما هو موضح في الصورة التالية:



ثم نقوم بإدخال المعادلة كما هو موضح في الشكل الموالي:



ثم نقوم بضغط Ok لظهر لنا نموذج الانحدار الخطي المتعدد الموضح في الصورة التالية



5.6 الأسئـــــلة والتمـــارين:

التمرين رقم 01 :

يبين الجدول التالي حجم الناتج الداخلي المحلي والانفاق الحكومي والايرادات العامة .

الوحدة : مليار دولار

الايرادات x_2	الانفاق الحكومي x_1	الناتج المحلي Y
2	4	25.6
6	8	32.7
8	12	45.4
10	16	53.9
12	20	59.0
15	24	62.6
18	28	65
20	32	65.5

الأسئلة:

بالاستخدام برنامج EViews أوجد مايلي:

1- رسم البياني للمتغيرات.

2- أكتب معادلة النموذج $Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$ ، ثم قم بتفسير النموذج المقدر؟

3- أوجد مجموع مربعات الأخطاء ؟.

4-استنتج تباين المعالم ؟.

4-اختبر معنوية العالم، ثم اختبر معنوية النموذج كليا ؟.

التمرين رقم 02 :

يبين الجدول التالي معدل النمو الاقتصادي ومعدل الانفتاح التجاري.

معدل الانفتاح التجاري t_i	معدل النمو الاقتصادي r_i
0.2	1.1
0.3	1.2
0.3	1.2
0.4	1.3
0.5	1.5
0.6	1.6
0.7	1.7
0.7	1.8

الأسئلة:

بالاستخدام برنامج EViews أوجد مايلي:

1- رسم البياني للمتغيرات.

2- أكتب معادلة النموذج $Y_i=a+bx_i$ ، ثم قم بتفسير النموذج المقدر؟

3- أوجد مجموع مربعات الأخطاء ؟.

4-استنتج تباين المعالم ؟.

5- اختبر معنوية العالم، ثم اختبر معنوية النموذج كليا ؟.

التمرين رقم 03 :

اكمل فراغات جدول EVIWS التالي :

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

Date: 12/10/13 Time: 21:16

Sample: 1 10

Included observations: 10

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	.....	6.104978	4.997476	0.0016
X1	0.968016	.....	10.06933	0.0000
X2	1.821604	9.148859	.....	0.8478

R-squared	.....	Mean dependent var	71.81900
Adjusted R-squared	.....	S.D. dependent var	.....
S.E. of regression	.....	Akaike info criterion	7.498439
Sum squared resid	580.0692	Schwarz criterion	7.589215
Log likelihood	-34.49220	F-statistic	.....
Durbin-Watson stat	2.067362	Prob(F-statistic)	0.000050

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

المراجع بالعربيـة:

1- أموري هادي كاضم الحسناوي ،**طرق القياس الاقتصادي**، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن ،2002.

2- تومي صالح، **مدخل لنظرية القياس الاقتصادي**، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999.

3- حسين علي بخيت وسحر فتح الله، **الاقتصاد القياسي**، دار اليازوري، عمان، الأردن، 2007.

4- دومينيك سالفادور ، **ملخصات شوم نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي**، ترجمة : سعدية حافظ منتصر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، مصر ، بدون سنة نشر .

5- سمير محمد عبد العزيز، **الإقتصاد القياسي مدخل في اتخاذ القرارات**، مكتبة الإشعاع للطباعة والنشر، الإسكندرية، مصر، 1997.

6- عبد العزيز شرابي، **طرق إحصائية للتوقع الاقتصادي**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2000.

7- عبد القادر محمد عبد القادر عطية، **الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق**، الدار الجامعية، السكندرية، مصر، 2006 .

8- عبد المحمود محمد عبد الرحمان، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، عمادة شؤون المكتبات، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995.

9- علي مكيد، **الاقتصاد القياسي- دروس ومسائل محلولة-**، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر،2007.

10- كمال سلطان محمد سالم، **الإحصاء الاحتمالي**، الدار الجامعية، 2004 .

11- محمد شيخي، **طرق الاقتصاد القياسي محاضرات وتطبيقات**، الطلعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2012.

12- مولود حشمان، **نماذج وتقنيات التنبؤ القصير المدى ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر**، 1998.

13- نعمة الله نجيب إبراهيم، **مقدمة في مبادئ الاقتصاد القياسي**، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، مصر،2002.

14- وليد إسماعيل السيفو وأحمد محمد مشعل، **الاقتصاد القياسي التحليلي بين النظرية و التطبيق**، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان الأردن، 2003.

المراجع باللغة الأجنبية:

1- BEN M'BAREK ALaya, **Séries d'exercices Corrigés d'économétrie**, Imprimere Officielle de la République Tunisienne, 2002.
2- GUJARATI. N. D, **Econométrie**, De Boeck, Bruxelles, 2004.
3- H.Kufman, **Les chroniques de la prévision à court terme**, Paris, édition dunod, 1975.
4- Isabelle Cadoret, Catherine Benjamin, Franck Martin, Nadine Herrard, Steven Tanguy , **Econométrie appliquée : méthodes, application corrigés**, De Boeck, Bruxelles.
5- KRIAA farouk, **Modélisation Econométrique, Cours et Exercices Corrigé.**
6- **M .David**, La prevision AEMS, Edition masson, Paris, 1984.
7- R.CARTER HILL /WILLIAME GRIFITHS/GUAY C.LIM, **Principles Of Econometrics**, Fourth Edition, 2011.
8- Régis Bourbonnais ; " **Économétrie : Manuel et exercices corrigés** " ; 8ème éd. ; Dunod ; Paris ; 2011.
9- SAMIR GHAZOUANI/ MOHAMED GOAIED, **Econométri Eléments De COURS et Exercices Corrigés**, TOME 1, Edition C.L.E, Tunis, 2015.