سادسا: توازن المستهلك رياضيا (حالة تعظيم المنفعة وحالة تقليل الانفاق)

توازن السوق رياضيا (حالة تعظيم المنفعة وحالة تقليل الانفاق)

نرمز لمضاعف لاغرانج بالرمز ħ وهو يعبر عن المنفعة الحدية للدخل أي هو التغير في المنفعة الكلية نتيجة ازدياد الدخل بالدينار الأخير.

ويستعمل لحل مشكلة تعظيم المنفعة الكلية وذلك بالاعتماد على دخل معين أو لتقليل الانفاق وذلك بتحديد أقل دخل ممكن الاعتماد عليه لتحقيق منفعة محددة يجب بلوغها، فهو يستعمل لإيجاد الحل لدوال تكون متغيراتها خاضعة لقيود ما والحفاظ على مضمون دالة الهدف.

والشكل العام لدالة لاغرانج هو

L = دالة الهدف + ħ [قيمة القيد − (دالة القيد)]

أولا: في حالة تعظيم المنفعة

$$L = f(x,y) + ħ [R - (X p_x + Y p_y) -]$$

$$L = f(x,y) + ħ [R - X p_x - Y p_y]$$

حل هذا الشكل يكون بمساوات المشتقات الجزئية الأولى لكل المتغيرات للصفر، فينتج لدينا ثلاث معادلات حسب الترتيب التالي

$$f'(x) - ħ\, p_x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$f'(y) - ħ\, p_y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$R - X p_x - Y p_y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بقسمة (1) على (2) يتم الحصول على

$$\frac{f'(x)}{f'(y)} = \frac{Px}{Py}$$

ونستخرج قيمة Y بدلالة X ونسميها المعادلة (4) ثم نقوم بتعويض (4) في (3) فنحدد القيمة العددية لـ X والتي نعوضها في (4) فنجد القيمة العددية لـ Y وكلاهما يعبر عن عدد الوحدات المستهلكة التي تحقق

التعظيم للمنفعة الكلية لهذا المستهلك وذلك في حالة القيم الانية لدخله R وأسعار السلع p_x و p_y وأخيرا نعوض X و Y في دالة المنفعة الكلية ut فنجد قيمتها العظمى.

ثانيا: في حالة تقليل الانفاق

$$L = X\,p_x + Y\,p_y + \dot{h}\,[u_o - (ut)]$$

عبارة دالة المنفعة الكلية — منفعة ثابتة تم بلوغها يجب المحافظة عليها

بمسواة المشتقات الجزئية إلى الصفر نجد

$$p_x - \dot{h}\,ut'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x - \dot{h}\,um_x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$p_y - \dot{h}\,ut'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y - \dot{h}\,um_y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$u_o - ut = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بقسمة (1) على (2) نجد Y بدلالة X وهي المعادلة (4) ونعوض (4) في (3) فنجد قيمة X والتي نعوضها في (4) فنجد قيمة Y وأخيرا نعوضها في عبارة الدخل R فنجد قيمة الدنيا.

ملاحظة: هناك شرطان لتوازن المستهلك وهما:

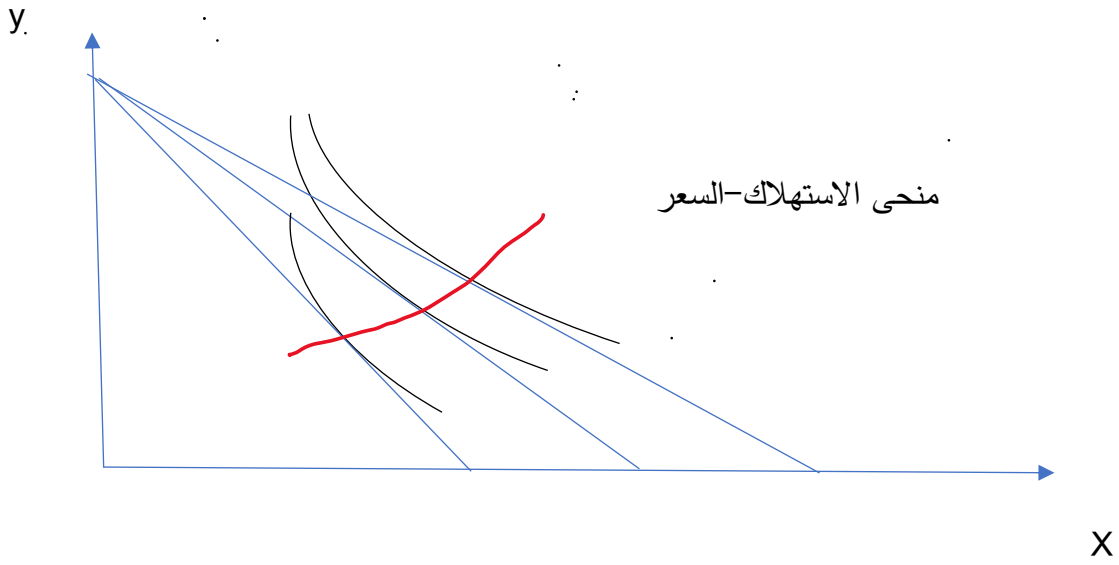
- عندما تتساوى المنفعة الحدية لوحدة النقد الأخيرة المنفقة على السلعة X مع المنفعة الحدية لوحدة المنفقة على السلعة Y أي $\dot{h} = \frac{umx}{px} = \frac{umy}{py}$
- إنفاق كل الدخل على شراء السلع أي $R = X\,p_x + Y\,p_y$

سابعا: منحنى الاستهلاك–السعر

وهو المنحنى الذي يربط بين مختلف الثنائيات (x,y) التي كل منها تمثل نقطة توازن وذلك في حالة تغير سعر احدى السلعتين مع بقاء سعر الأخرى ثابت وكذلك الدخل ثابت، فتكون خطوط الميزانية في كل مرة غير متوازية، وبتغير خط الميزانية إلى الابتعاد عن نقطة المبدأ فيتم ملامسة منحنى سواء أعلى في نقطة واحدة والتي تمثل نقطة التوازن في كل مرة.

وشكل منحنى الاستهلاك–السعر يكون كما يلي:

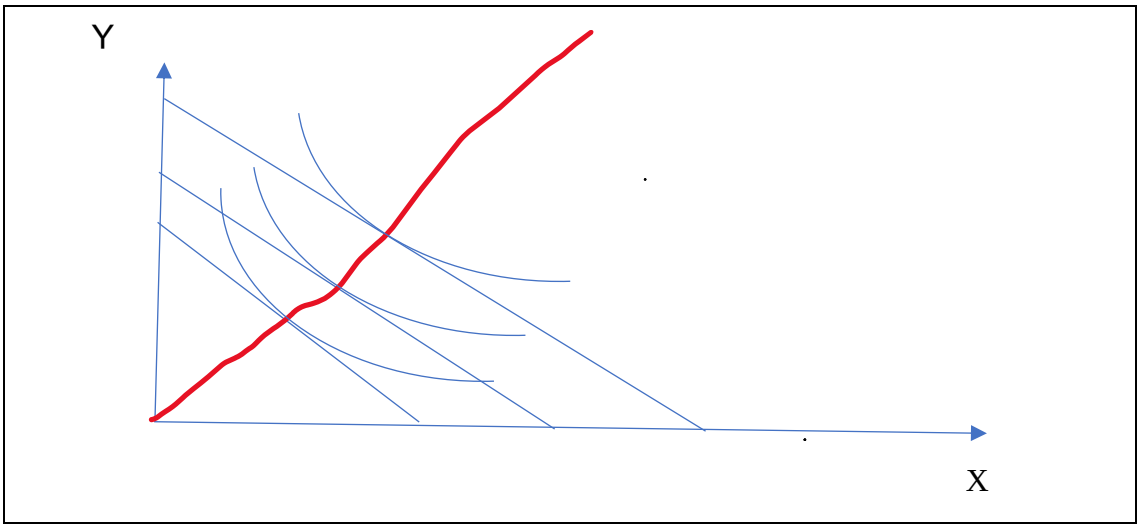
الشكل رقم 5: منحنى الاستهلاك–السعر



ثامنا: منحنى الاستهلاك–الدخل

هو المنحنى الذي يمر على مختلف نقاط التوازن وذلك في حالة ثبات كل من p_x و p_y وفي كل مرة يتغير R فينتج عنه تغير نقطة التوازن، حيث كلما زاد الدخل فإن خط الميزانية يبعد عن نقطة المبدأ مع ملاحظة أنه يبقى موازي للقديم، وهو يبين مستوى تطور معيشة المستهلك، ويمكن تمثيله كما يلي:

الشكل رقم 6: منحنى الاستهلاك–الدخل



مع ملاحظة أن منحنى الاستهلاك–الدخل يمر من نقطة المبدأ

ويمكن استنتاج منحنى أنجل للسلعة X أو للسلعة y من منحنى الاستهلاك–الدخل وهو الذي يربط بين الكمية المستهلكة من y وقيمة الدخل في كل مرة، حيث نفرق بين نوعين من السلع وهما:

- السلعة العادية: كلما ازداد R زادت الكمية المستهلكة منها، فيكون منحنى انجل موجب الميل؛
- السلعة الدنيا: كلما ازداد R نقصت الكمية المستهلكة منها، فيكون منحنى انجل سالب الميل.

منحنى انجل:

إذا تم تحديد الكميات المستهلكة من السلعة X المقابلة لكل قيمة الدخل R فإن المنحنى الذي يربطها يسمى منحنى انجل لـ X، ويكون ذو ميل موجب بالنسبة للسلع العادية، وكذلك يمكن ملاحظة أن السلع الضرورية تكون نسبة تأثيرها قليلة بالنسبة للمتغيرات التي تحدث في الدخل[6].

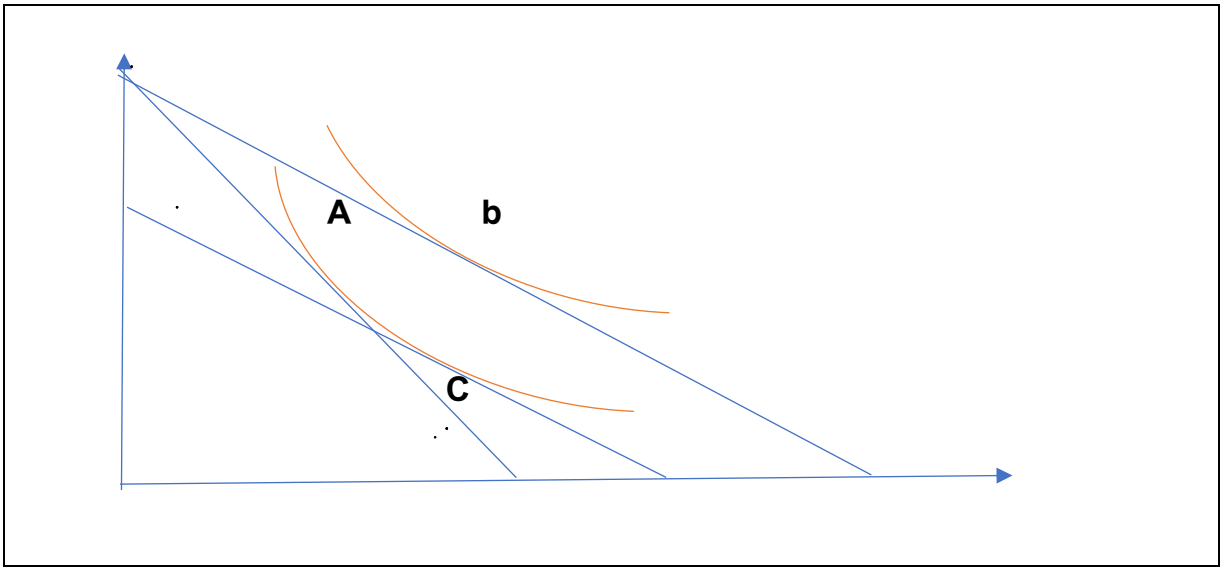
تاسعا: أثر الدخل وأثر الاحلال

أثر الدخل: هو مقدار التغير في الكمية المستهلكة من سلعة معينة، وهذا بسبب تغير الدخل الحقيقي للمستهلك.

أثر الاحلال: هو مقدار التغير في الكمية المستهلكة من سلعة معينة، ولتكن x وذلك عند انخفاض أو ازدياد سعر x مقارنة بسعر سلعة أخرى ولتكن y بحيث المستهلك يزيد من استهلاك السلعة التي انخفض سعرها نسبيا، مع ضرورة بقاء الدخل الحقيقي للمستهلك ثابت.

[6] كامل سلمان العاني، المصدر سبق ذكره، ص 108.

الشكل رقم 7: التمثيل البياني لنقاط التوازن المحددة لأثر الاحلال وأثر الدخل



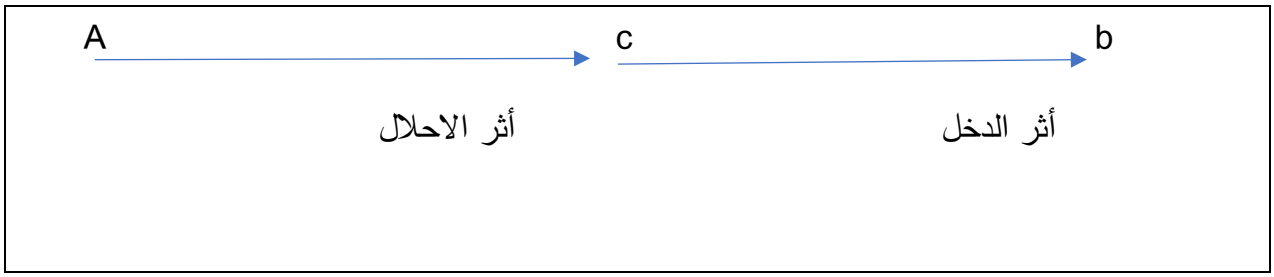
A هي نقطة التوازن الاصلية؛

b هي نقطة التوازن الجديدة؛

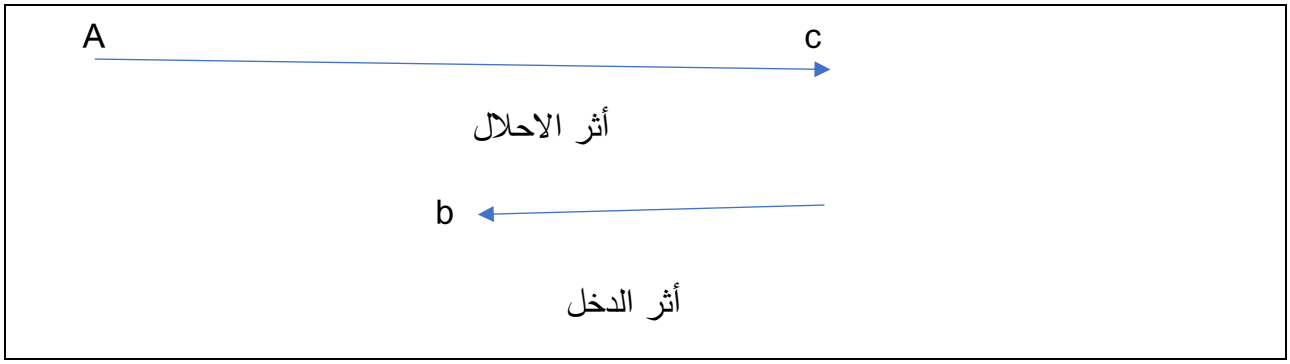
c هي نقطة التوازن التي لها نفس المنفعة الكلية لـ A وذلك بخط ميزانية موازي لخط الميزانية الجديد الذي كانت b هي نقطة التوازن حسبه.

وحسب وضعية نقاط التوازن في كل حالة يمكن استنتاج طبيعة السلعة، وذلك من خلال الاتجاه والقيمة الأكبر لأثر الاحلال او الدخل وذلك كما يلي:

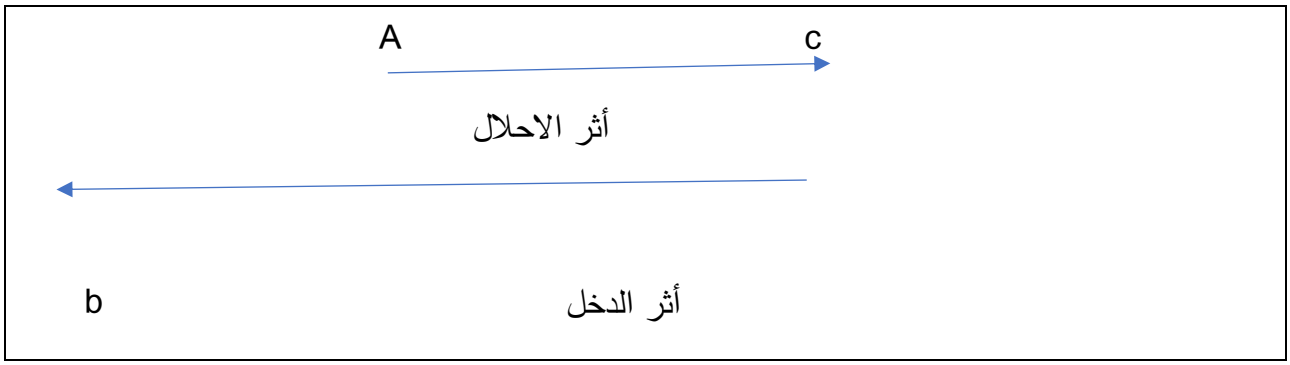
1) السلعة العادية



2) السلعة الدنيا



3) السلعة قيفن



ملاحظات:

- لجعل الدخل الحقيقي لمستهلك ثابت، ففي حالة انخفاض ثمن السلعة X فإننا نفرض ضريبة على الدخل وفي حالة زيادة ثمنها فإننا نقدم اعانة لدخل المستهلك؛
- الأثر الكلي يساوي أثر الاحلال زائد أثر الدخل.

التمرين رقم 4:

إذا كانت دالة منفعة مستهلك بالشكل التالي

$U = 3 X Y$

وكانت أسعار السلع هي $p_x = 2$ و $p_y = 3$ و $R = 32$

المطلوب:

1) إيجاد نقطة التوازن؟

2) إذا ارتفع px إلى 4، فما هو أقل دخل ممكن استعماله للمحافظة على نفس المنفعة الكلية السابقة.

الحل:

1) يمكن تحديد نقطة التوازن كما يلي

من الشرط الأول للتوازن

$$\frac{f'(x)}{f'(y)} = \frac{px}{py}$$

$$\frac{3y}{3x} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{2X}{3}$$

نعوض في الشرط الثاني للتوازن

$$R = X p_x + Y p_y$$

$$32 = 2X + 3Y \quad \Rightarrow \quad 32 = 2X + 3\frac{2X}{3} = 2X + 2X = 4X$$

$$X = \frac{32}{4} = 8$$

$$Y = \frac{2}{3}\ 8 = \frac{16}{3}$$

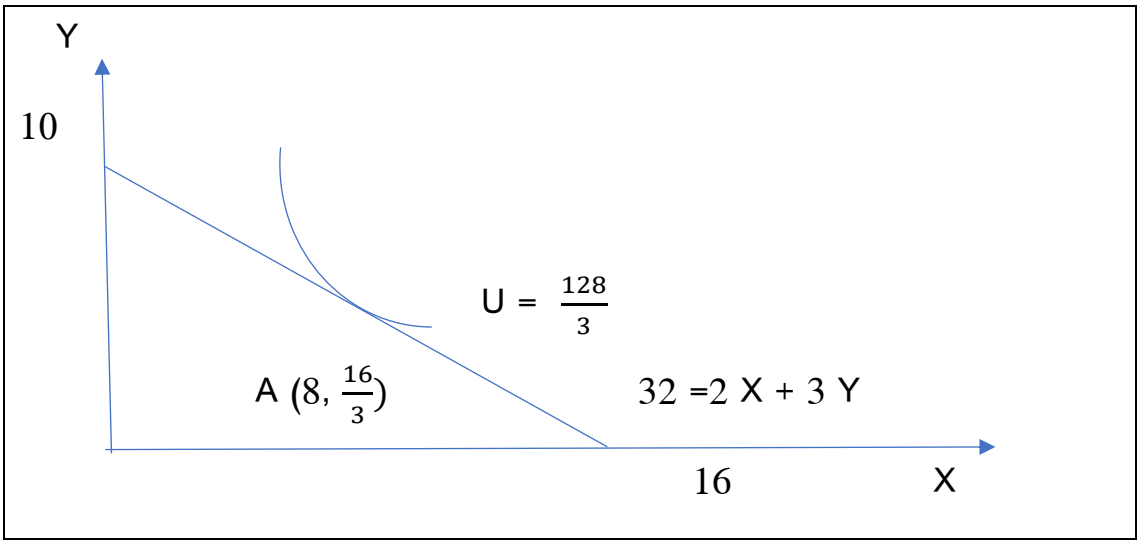
ومنه نقطة التوازن هي a

$$a\ (8, \frac{16}{3})$$

وقيمة المنفعة الكلية

$$U = 3XY = 3 \cdot 8 \cdot \frac{16}{3} = \frac{128}{3}$$

فيكون التمثيل البياني لتوازن المستهلك يكون كما يلي



ثانيا: في حالة التقليل

بالاعتماد على طريقة لاغرانج

$L = r + \hbar [uo - (ut)]$

$L = 4x + 3y + \hbar [128 - 3xy]$

$L'(x) = 4 - 3\hbar y = 0$ ..... (1)

$L'(Y) = 3 - 3\hbar x = 0$ ..... (2)

$L'(\hbar) = 128 - 3xy = 0$ ..... (3)

بقسمة (1) على (2) نجد

$\frac{4}{3} = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = \frac{4}{3} X$ .....(4)

بتعويض (4) في (3) نجد

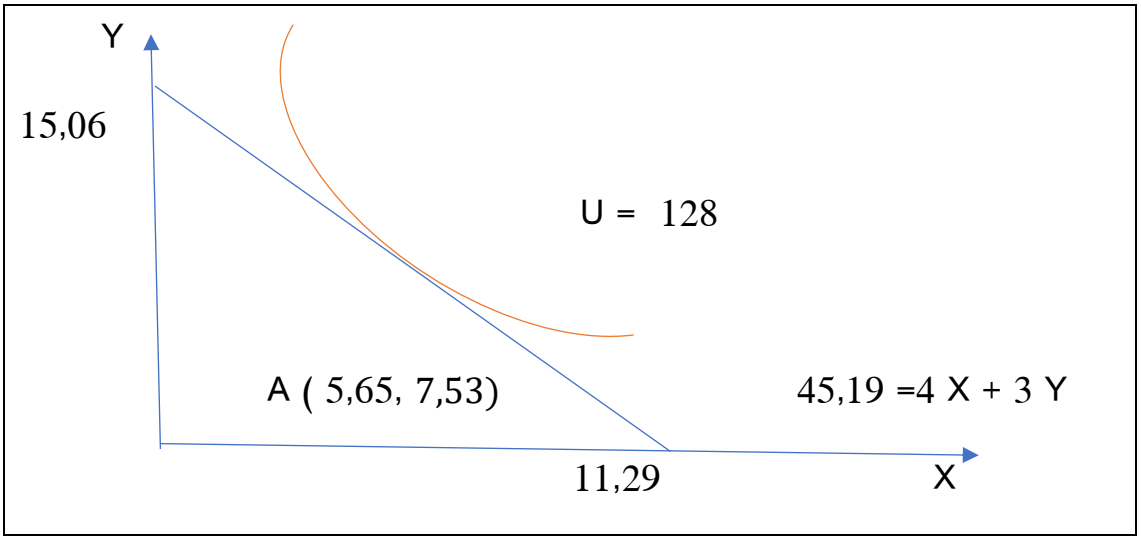
$128 - 3X\frac{4}{3}X = 0 \Rightarrow 128 = 4X^2 \Rightarrow X = 5{,}65$

$Y = \frac{4}{3}\ 5{,}65 = 7{,}53$

ومنه أقل دخل لتحقيق منفعة قدرها 128 هو R′

$R' = 4\ (5,65) + 3\ (7,53) = 45,19$

والتمثيل البياني يكون كما يلي



التمرين رقم 5:

لتكن دالة المنفعة من الشكل $U = 3\ X\ Y^2$

المطلوب:

1) استخرج دوال الطلب على X و Y؟

2) إذا كان $p_x = 3$ و $p_y = 4$ و $R = 24$، وكان هذا المستهلك يستهلك 5 وحدات من X و 4 وحدات من Y وهو مستعد للتخلي على وحدتين من Y مقابل الحصول على 5 وحدات من X، فهل النقطة (5.4) نقطة توازن ولماذا؟

3) إذا كانت النقطة (5.4) ليست نقطة توازن، فماذا يفعل المستهلك حتى ينتقل إلى نقطة توازن؟

4) حدد قيمة المنفعة الكلية إذا كان $R = 23$؟