الفصل السادس: تحليل سلوك المنتج

أولا: تحليل سلوك المنتج في الفترة القصيرة

الفرضية الأساسية التي يرتكز عليها تحليل سلوك المنتج هي أن المنتج عقلاني، فهو يسعى لإنتاج كمية من السلع التي من خلال بيعها يتم تعظيم ربحه، وذلك في حدود الميزانية المخصصة للإنتاج أي الأموال التي بها يتمكن من اقتناء عوامل الإنتاج وذلك بحسب أسعار تلك العوامل في السوق، ومن بين عوامل الإنتاج هناك: العمل (سعره هو الاجر)، رأس المال (سعره معدل الفائدة عند الاقتراض من البنك) والأرض (سعرها ثمن كرائها) ....إلخ.

ستتم دراستنا على اعتبار عوامل الإنتاج تقتصر على عدد العمال L ورأس المال k فتكون دالة الإنتاج بالشكل

$$X = f(L, K)$$

ويمكن دراسة دالة الإنتاج في المدى القصير، وفي المدى الطويل.

1/ دالة الإنتاج في المدى القصير

في المدى القصير أي فقط عدد العمال يمكن تغيره أما رأس المال فهو ثابت.

دالة الإنتاج في المدى القصير يحكمها قانون تناقص الغلة، والذي يقول بأن الإنتاج الكلي سيزداد بشكل متزايد ولكن إلى حد معين وبعد ذلك ستكون زيادة ولكن بشكل أقل فأقل وحينها يكون كل من الإنتاج المتوسط PPML والإنتاج الحدي PPMGL في حالة تناقص.

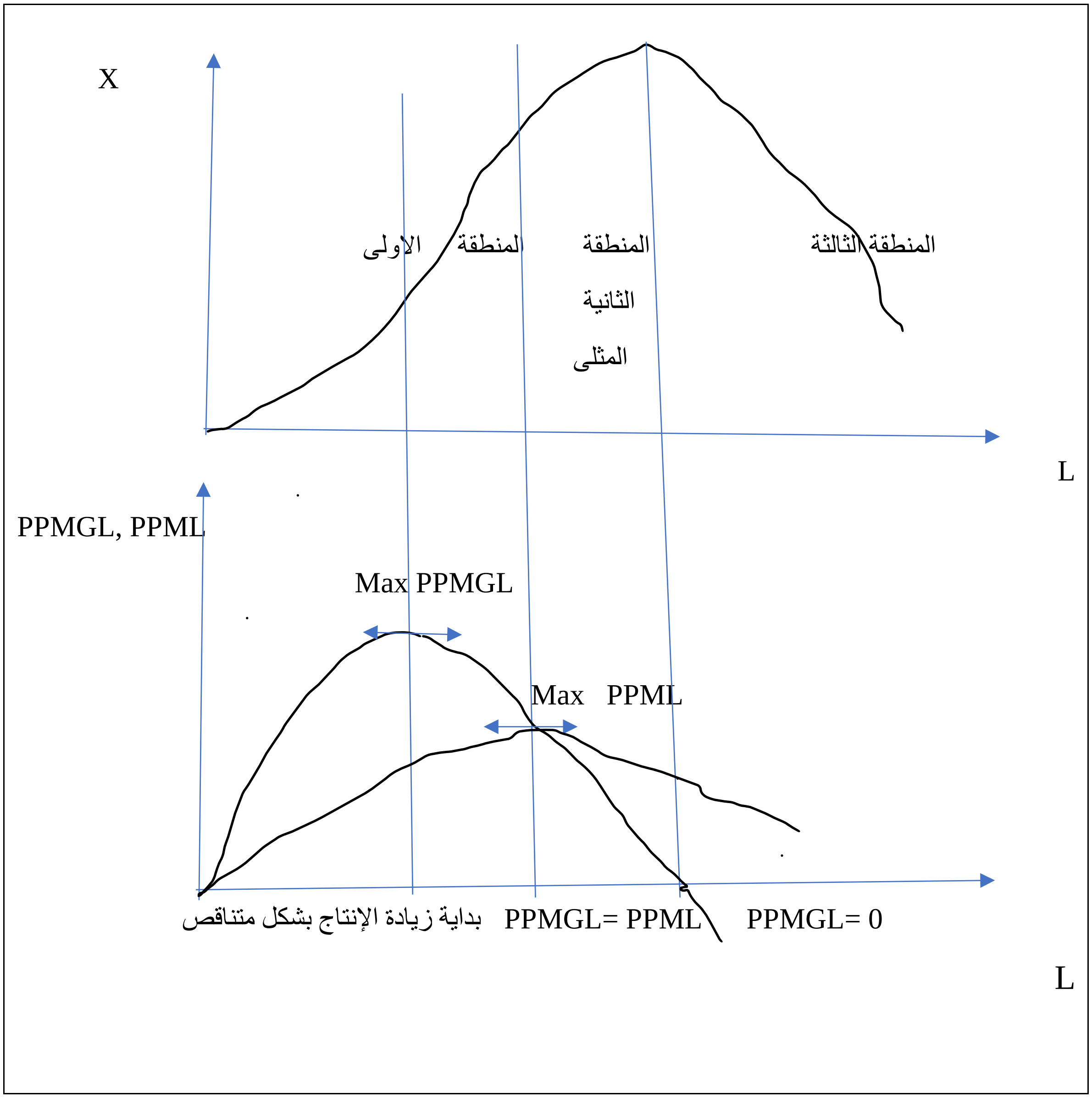
الإنتاج المتوسط

$$PPML = \frac{\text{الناتج الكلي}}{\text{عدد العمال}} = \frac{X}{L}$$

الإنتاج الحدي

$$PPMGL = \frac{\text{التغير في الانتاج الكلي}}{\text{التغير في عدد العمال}} = \frac{\partial X}{\partial L}$$

الشكل رقم 12: مراحل الإنتاج في المدى القصير



فتكون حدود مناطق الإنتاج كما يلي:

المنطقة الاولى: 0 ⟶ Max PPML, PPMGL= PPML

المنطقة الثانية: Max PPML, PPMGL= PPML ⟶ PPMGL = 0

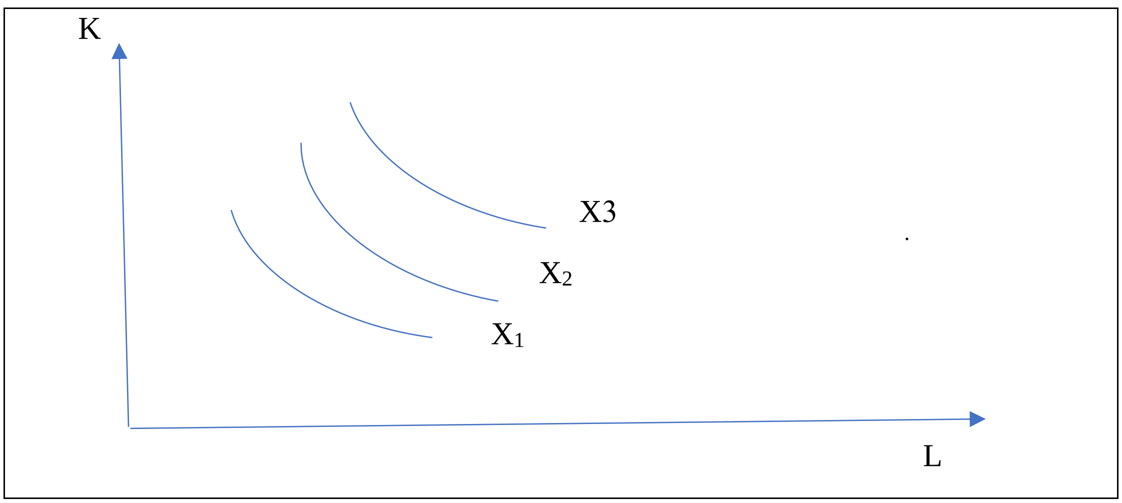
المنطقة الثالثة: PPMGL = 0 ⟶ + ∞

المنطقة المثلى للإنتاج هي الثانية، لأن في الأولى كلما زاد عدد العمال فإن الإنتاج المتوسط يزداد وكذلك الإنتاج الحدي أكبر من المتوسط فالمنطق يقول بأنه يجب الزيادة في عدد العمال، أما المنطقة الثالثة ففيها الإنتاج الحدي سالب فلا يجب الإنتاج في ظروفها ومنه المنطقة الثانية هي المثلى.

ثانيا: تحليل سلوك المنتج في الفترة الطويلة من خلال منحنيات الناتج المتساوي

الفترة الطويلة يكون فيها كل من K و L متغيران، ويمكن التعبير عن دالة الإنتاج حينها بما يسمى منحنى الناتج المتساوي وهو عبارة عن مجموعة منحنيات، بحيث كل منها يجمع ثنائيات من عوامل الإنتاج تعطي نفس حجم الإنتاج ومجموعة منحنيات الناتج المتساوي تدعى بخريطة أو شبكة منحنيات الناتج المتساوي، ويمكن تمثيلها كما يلي:

الشكل رقم 13: شبكة منحنيات الناتج المتساوي



منحنيات الناتج المتساوي لها نفس خصائص منحنيات السواء أي ميلها سالب وهو ما يعكس ظاهرة إحلال L مكان K، محدبة نحو نقطة المبدأ ولا تتقاطع فيما بينها.

ثالثا: المعدل الحدي للإحلال الفني

نرمز له بالرمز $TMST_{LK}$ وهو يمثل عدد الوحدات التي يجب التخلي عليها من k مقابل إضافة وحدة واحدة من L والبقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي أي تحقيق نفس الإنتاج الكلي ويحسب بإحدى العلاقات التالية:

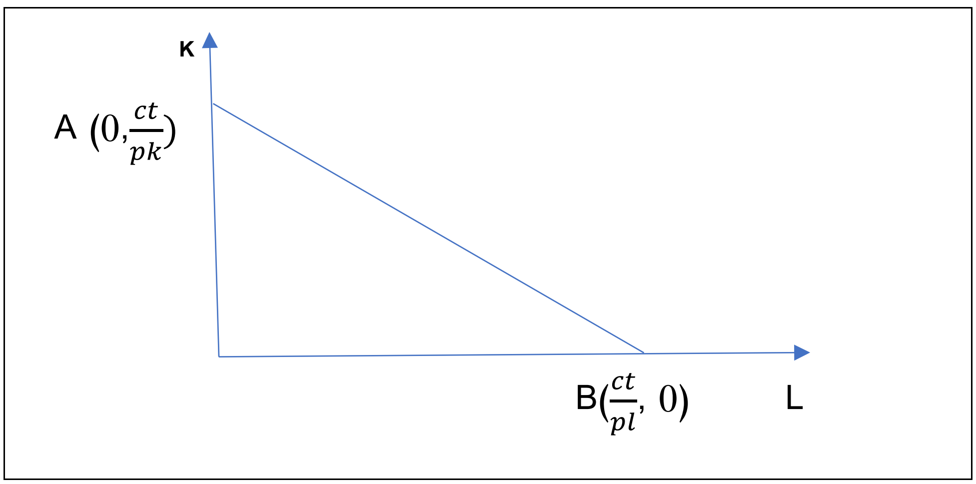
$$TMST_{LK} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{-\partial K}{\partial L} = \frac{PPMGL}{PPMGK} = \text{tang}\ \alpha$$

رابعا: منحنى التكاليف المتساوية أو قيد الميزانية

يستنتج من التمثيل البياني لمعادلة التكلفة يسمى بمنحنى التكاليف المتساوية.

$$Ct = L\ P_L + K\ P_K$$

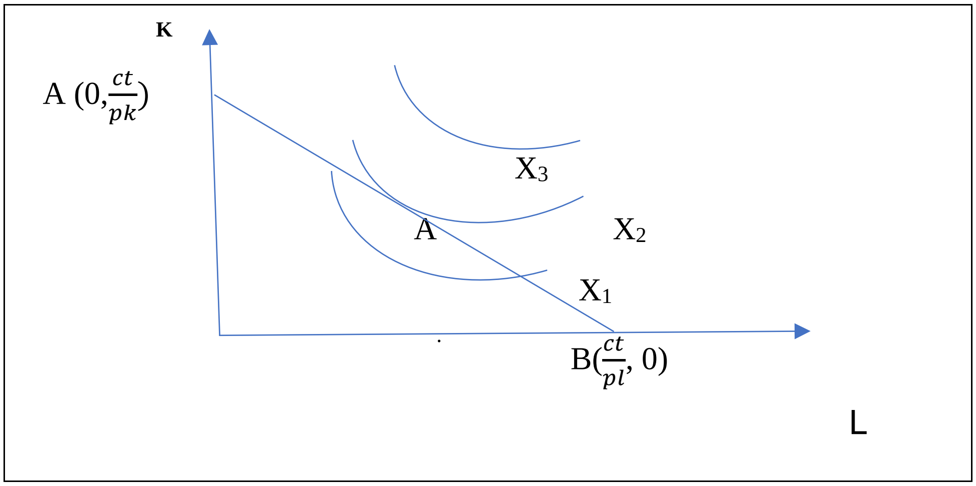
الشكل رقم 14: منحنى التكاليف المتساوية



خامسا: توازن المنتج بيانيا (حالة التعظيم وحالة التقليل)

تتحدد نقطة التوازن لما يكون التماس بين منحنى التكاليف المتساوي بأعلى منحنى ناتج متساوي، ويتم تمثيل التوازن كما يلي:

الشكل رقم 15: توازن المنتج بيانيا



سادسا: توازن المنتج رياضيا (حالة التعظيم وحالة التقليل)

يتم الوصول إلى توازن المنتج في حالتان وهما:

1) حالة تعظيم قيمة الإنتاج وذلك في حدود قيمة معينة لميزانية الإنتاج (حالة تعظيم)

2) حالة تقليل التكلفة الكلية وذلك للوصول إلى قيمة معينة للإنتاج (حالة التقليل)

أولا: حالة التعظيم

L= دالة الانتاج + ħ [CT_0 – L P_L – K P_K]

$L'(L)= ppmgL - ħ\, P_L = 0$ (1)

$L'(k)= ppmgk - ħ\, P_k = 0$ (2)

$L'(ħ) = CT_0 - L\, P_L - K\, P_K = 0$ (3)

بقسمة (1) على (2) نجد (4) $\frac{pl}{pk} = \frac{ppmgl}{ppmgk}$ وهو الشرط الأول للتوازن

المعادلة (4) نجدها بشكل K بدلالة L والتي نعوضها في (3) أي $CT_0 - LP_L - KP_K = 0$ وهو الشرط الثاني للتوازن.

ثانيا: حالة التقليل

$$L = L\,P_L + K\,P_K + ħ\,[\,X_0 - F(K,L)\,]$$

$$L'(L) = P_L - ħ\ ppmgL = 0 \qquad (1)$$

$$L'(k) = P_k - ħ\ ppmgk = 0 \qquad (2)$$

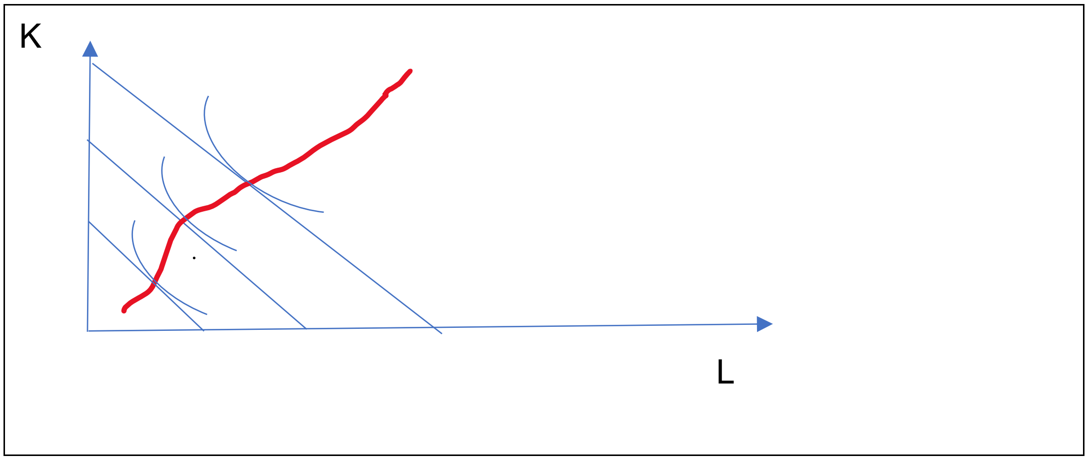
$$L'(ħ) = X_0 - X = 0 \qquad (3)$$

بقسمة (1) على (2) نجد (4) $\frac{pl}{pk} = \frac{ppmgl}{ppmgk}$ وهي عبارة عن K بدلالة L والتي نعوضها في (3) فنجد قيم كل من K و L وهما احداثيات نقطة التوازن في حالة تقليل التكلفة.

سابعا: مسار التوسع

يمكن تمثيله بالمنحنى الذي يربط بين نقاط توازن المنتج وذلك في حالة تغير الانفاق الكلي، مع ثبات أسعار عوامل الإنتاج.

الشكل رقم 16: مسار التوسع



يمكن الحصول على معادلة مسار التوسع من خلال القيام بتعظيم قيمة الإنتاج وذلك في حدود قيمة معينة للميزانية، وهي تتمثل في المعادلة (4) ولكن بشرط إيجاد k بدلالة L وليس L بدلالة k حيث k بدلالة L هي تمثل ثنائيات توازنيه عند مستويات مختلفة للإنفاق الكلي.

ثامنا: الدوال المتجانسة ودالة كوب دوغلاس

يتم استنتاج أن دالة هي متجانسة من خلال تحديد نوع غلة الحجم، والتي تتمثل في مقدار الزيادة في الإنتاج الكلي نتيجة تزايد عوامل الإنتاج بنسبة واحدة معينة، فهي تمثل نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي مقارنة بنسبة الزيادة في عوامل الإنتاج.

يتم ذلك من خلال دراسة درجة تجانس الدالة، حيث درجة تجانس الدالة هي قيمة n، وهل هي متجانسة أو ليست متجانسة يستنتج من حساب. بإعتبار $X = F(L, K)$

$$X^* = F(TL, TK) = T^n F(L, K) = T^n \cdot X$$

بحيث $T > 0$

فإذا تم التمكن من استخراج T^n فالدالة متجانسة ودرجة تجانسها هي n فإذا كانت $n > 1$ فإن غلة الحجم متزايدة وإذا كانت $n = 1$ فإن غلة الحجم ثابته، فإذا كانت $n < 1$ فإن غلة الحجم متناقصة.

مع العلم أن درجة التجانس رياضيا هي تمثل غلة الحجم اقتصاديا

2) دالة الانتاج كوب دوغلاس

هي الدالة التي تقيس العلاقة بين حجم الإنتاج x وعناصر الإنتاج في كل من الاجل القصير والاجل الطويل وشكلها هو

$$X = a\, l^{\propto}\, k^{b}$$

بحيث a هو المستوى الفني أو التكنولوجي، $\propto$ و b ثوابت موجبة وقيمة أي منهما تنتمي إلى المجال $[1،0]$.

تاسعا: مرونات الانتاج

تكون المرونة في كل مرة بنسبة لأحد عوامل الإنتاج، وهي تقيس أثر التغير النسبي في حجم الإنتاج نتيجة التغير النسبي في الكمية المستخدمة من عامل الإنتاج هذا.

$$e_{xL} = \frac{\partial X}{\partial L} \frac{L}{X} = a \propto L^{\propto -1} K^{b} \frac{L}{a L^{\propto} K^{b}} = \propto$$

$$e_{xk} = \frac{\partial X}{\partial K} \quad \frac{K}{X} = a\ b\ \ L^{\propto}\ \ K^{b-1}\ \frac{K}{a\ L^{\propto}\ K^{b}} = b$$

ملاحظات:

– في حالة دالة الإنتاج كوب دوغلاس فإن أس كل متغير هو نفسه مرونة الإنتاج بالنسبة لذلك العنصر.

– $n = \propto + b$ وذلك عند السعي لتحديد غلة الحجم.

التمرين رقم 13:

لتكن دالة الإنتاج في المدى القصير التالية

$$X = f(L) = 3\ L^{3} - 20\ L^{2} + 6\ L$$

المطلوب:

1) حدد كل من الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي؟

2) حدد عدد العمال الذي عنده يبدأ يزداد الإنتاج بشكل متناقص؟

3) حدد حدود مناطق الإنتاج؟

الحل:

1) تحديد كل من الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي

الإنتاج المتوسط

$$PPML = \frac{\text{الناتج الكلي}}{\text{عدد العمال}} = \frac{X}{L} = \frac{3\ L^{3} - 20\ L^{2} + 6\ L}{L} = 3\ L^{2} - 20\ L + 6$$

الإنتاج الحدي

$$PPMGL = \frac{\text{التغير في الانتاج الكلي}}{\text{التغير في عدد العمال}} = \frac{\partial X}{\partial L} = 9L^{2} - 40\ L + 6$$

2) تحديد عدد العمال الذي عنده يبدأ يزداد الإنتاج بشكل متناقص

يتوافق ذلك مع Max PPMGL

$PPMGL'(l) = 18\,L - 40$

$PPMGL'(l) = 0$

$18\,L - 40 = 0$

$L = \frac{40}{18} = 2,2$

يبدأ الإنتاج بالتزايد بشكل متناقص لما عدد العمال يساوي 2,2.

3) تحديد حدود مناطق الإنتاج

المنطقة الأولى: 0 $\longrightarrow$ Max PPML, PPMGL= PPML

Max PPML

$PPML' = 6\,L - 20$

$PPML' = 0$

$6\,L - 20 = 0$

$L = \frac{20}{6} = 3,33$

المنطقة الأولى : 0 $\longrightarrow$ 3,33

المنطقة الثانية: Max PPML, PPMGL= PPML $\longrightarrow$ PPMGL = 0

PPMGL = 0

$9\,L^2 - 40\,L + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$

$\Delta = (40)^2 - 4\,(9)\,(6) = 1600 - 216 = 1384$

$\sqrt{\Delta} = 37{,}2$

المعادلة تقبل حلين

$L_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} = \frac{40-37{,}2}{18} = 0{,}15$ منطقيا مرفوض

$L_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a} = \frac{40+37{,}2}{18} = 4{,}28$ منطقيا هو المقبول

المنطقة الثانية: $3{,}33 \longrightarrow 4{,}28$

المنطقة الثالثة: $PPMGL = 0 \longrightarrow +\infty$

المنطقة الثالثة: $4{,}28 \longrightarrow +\infty$

التمرين رقم 14:

لتكن دالة الإنتاج التالية

$X = f(L,K) = 2\,L^{\frac{2}{3}}\,K^{\frac{4}{3}}$

المطلوب:

1) حدد درجة غلة الحجم مع التفسير؟

2) أوجد المعدل الحدي للإحلال التقني في حالة $L = 2$ و $K = 6$، وقدم تفسيرا للنتيجة المتحصل عليها؟

3) أرسم منحنى الناتج المتساوي لما يكون $X = 4$؟

الحل:

1) تحديد درجة غلة الحجم مع التفسير

$X^* = f(t\,L, t\,K) = 2\,(t\,L)^{\frac{2}{3}}\,(t\,K)^{\frac{4}{3}}$

$X^* = 2\,t^{\frac{2}{3}}\,L^{\frac{2}{3}}\,t^{\frac{4}{3}}\,\,k^{\frac{4}{3}} = \,t^{\,2}2\,L^{\frac{2}{3}}\,t^{\frac{4}{3}}\,\,k^{\frac{4}{3}}$

$X^* = t^2$ X

بما أنه تم التمكن من استخراج t^n كعامل مشترك، فإن هذه الدالة متجانسة ودرجة تجانسها هي 2، ومنه زيادة عوامل الإنتاج L وK بالنسبة t فإن الإنتاج يزداد بنسبة قدرها t^2.

2) ايجاد المعدل الحدي للإحلال التقني في حالة L = 2 و K = 6، وتقديم تفسيرا

$$\text{TMST}_{LK} = \frac{F\ L}{F\ K} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)L^{\frac{2}{3}-1}K^{\frac{4}{3}}}{2\,L^{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)K^{\frac{4}{3}-1}} = \frac{K}{2\,L}$$

$$\text{TMST}_{LK} = \frac{6}{2\,(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

K	L
$2\left(\frac{3}{2}\right)$	$2\,(1)$
3	2

التفسير: هذا المنتج يقوم بالتخلي على 3 وحدات من K مقابل إضافة وحدتين من L والبقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي.

تعريف منحنى الناتج المتساوي: هو المنحنى الذي يجمع الثنائيات L وK التي من خلالها يتم الحصول على نفس الإنتاج X وكلما تم الانتقال إلى منحنى أبعد عن نقطة المبدأ فإن قيمة الإنتاج تكون أكبر، وهي لا تتقاطع فيما بينها وهي محدبة نحو نقطة المبدأ.

3) رسم منحنى الناتج المتساوي لما يكون X = 4.

$$4 = f\,(L, K) = 2\,L^{\frac{2}{3}}\,K^{\frac{4}{3}}$$

$$2 = L^{\frac{2}{3}}\,K^{\frac{4}{3}}$$

$$K^{\frac{4}{3}\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{L^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{L^{\frac{2}{3}\frac{3}{4}}} = \frac{1{,}68}{L^{\frac{1}{2}}}$$