الفصل الأول:

مفاهيم عامة حول السلاسل الزمنية

المبحث الأول: عرض السلاسل الزمنية والعوامل المؤثرة فيها.

المطلب الأول: عموميات حول السلاسل الزمنية.

المطلب الثاني: مركبات السلسلة الزمنية.

المبحث الثاني: شكل السلسلة الزمنية وطرق الكشف عن مركباتها.

المطلب الأول: الشكل النظري للسلسلة الزمنية وأسلوب تحديدها.

المطلب الثاني: الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية.

تطبيقات الفصل الأول.

حلول تطبيقات الفصل الأول.

تمهيد

إن دراسة السلاسل الزمنية لها أهمية بالغة لما تقدمه من معلومات حول العناصر الأساسية التي تتميز بها ظاهرة ما عبر الزمن، ومن خلال متابعة تغيراتها وتطورها العام، يمكننا بصورة جيدة من معرفة كيفية تطورها مستقبلا، كما يساعدنا في تحديد مختلف العوامل المؤثرة على هذه الظاهرة.

كما يعد موضوع دراسة وتحليل المتسلسلات الزمنية من المواضيع الإحصائية المهمة، والتي تتناول سلوك الظواهر، وتفسرها عبر فترات محددة (سنوية، سداسية، ثلاثية، ... إلخ). ويمكن حصر عرض، أهداف تحليل السلاسل الزمنية بالحصول على وصف دقيق للملامح الخاصة للعملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية، وبناء نموذج لتفسير سلوك السلسلة الزمنية واستخدام النتائج للتنبؤ بسلوك السلسلة في المستقبل، إضافة إلى التحكم في العملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية بفحص ما يمكن حدوثه عند تغيير بعض معلمات النموذج[1]. ولتحقيق ذلك يتطلب الأمر دراسة تحليلية وافية لنماذج السلاسل الزمنية بالاعتماد على الأساليب الإحصائية والرياضية.

وحتى نتمكن من فهم أكثر حول تحليل السلاسل الزمنية قمنا بتقسيم هذا الفصل إلى مبحثين، وهما:

- عرض السلاسل الزمنية والعوامل المؤثرة فيها؛
- شكل السلسلة الزمنية وطرق الكشف عن مركباتها.

المبحث الأول: عرض السلاسل الزمنية والعوامل المؤثرة فيها.

إن تحليل المتسلسلات الزمنية لها دور هام لما تقدمه من معلومات حول المركبات أو العناصر الأساسية التي تتميز بها ظاهرة ما عبر الزمن، وتتبع تغيرات السلسلة الزمنية وتطورها العام، يمكننا بصورة جيدة من معرفة كيفية تطورها مستقبلا كما يساعدنا في تحديد مختلف العوامل المؤثرة على هذه الظاهرة. وهذا ما سيتم عرضه من خلال العناصر الموالية من هذا المبحث والمتمثلة أساسا في عموميات حول السلاسل الزمنية وأشكالها وطرق الكشف عنها.

المطلب الأول: عموميات حول السلاسل الزمنية.

في هذا المطلب سنتناول تعريف السلسلة الزمنية، ترتيبها والهدف من دراستها.

1 -تعريف السلسلة الزمنية: السلسلة الزمنية بكل بساطة هي مجموعة القياسات المسجلة لمتغير واحد أو أكثر مرتبة حسب زمن وقوعها، أو "تمثل السلسلة الزمنية مجموعة المعطيات لظاهرة ما مشاهدة عبر الزمن"[2]، حيث يختلف الزمن حسب نوع الظاهرة المشاهدة، وبعبارة أخرى فالسلسلة الزمنية لظاهرة معناه بيان قيم هذه الظاهرة خلال مدة معينة من الزمن، وتسمى المقادير أو القيم المشاهدة للسلسلة بالقيم الفعلية أو التاريخية، وبذلك يمكن تميز متغيرين أحدهما مستقل وهو الزمن ويرمز له بالرمز "t" والآخر هو القيمة الظاهرة وهو المتغير التابع، يرمز له بالرمز "x".

[1] لمعلومات أكثر أنظر: عبيد محمود محسن الزوبعي: "**طريقة مقترحة لتشخيص نماذج السلاسل الزمنية**"، المؤتمر الاحصائي العربي الأول، عمان، الأردن، 12 -13 - نوفمبر 2007.

[2] *G .Bresson et A.Pirrotte: Opcit, P 13*

ويمكن تعريفها أيضا بأنها "متتالية المشاهدات المرقمة والمركبة عبر الزمن، حيث نرمز عادة لمتغير الدراسة بـ (x) وللزمن بـ (t)، و هذه المشاهدات المتغيرة تدعى سلسلة زمنية"[3].

وبصفة عامة هي عبارة عن مجموعة من القياسات المأخوذة من متغير واحد أو عدد من المتغيرات مرتبة وفقا لزمن حدوثها أي هي البيانات الإحصائية التي تجمع أو تسجل عن ظاهرة ما لفترات زمنية متتابعة محددة ومتساوية. و يمكن كتابة السلسلة الزمنية في الشكل التالي[4]:

$(X_1, X_2 \ldots \ldots . X_t)$ أو $\{X_t\}$, $t = 1, 2 \ldots \ldots . T,$

حيث يتم معاملة X_t على أنها متغيرة عشوائية.

من أهم السلاسل الزمنية تلك الخاصة بالمؤشرات الاقتصادية والمبيعات السنوية للمؤسسات بكافة أوجه نشاطاتها والتعليم وحجم السكان وما شابه ذلك.

ونموذج السلسلة الزمنية (*Time Series Model*) هو الدالة التي تربط قيم السلسلة الزمنية بالقيم السابقة لها ولأخطائها.

2 -**التحويل:** إن عملية رسم البيانات مهمة للغاية، وقد نحتاج لإجراء تحويل على البيانات كأخذ اللوغاريتم أو الجذر التربيعي، والأسباب الرئيسية لإجراء أي تحويل هي:

- تثبيت التباين؛
- لجعل التأثيرات الموسمية تجميعية؛
- لجعل توزيع البيانات "طبيعي".

3 -**ترتيب السلسلة الزمنية**: يمكننا ترتيب السلسلة الزمنية حسب ما يلي:

• **الفترة الزمنية:** تؤخذ المشاهدات على أبعاد زمنية متساوية ومحددة، أي خلال أوقات محدودة، مثلا أول كل أسبوع، كل شهر، كل سنة، أواخر كل أسبوع، كل شهر، كل فصل، كل سنة، ... الخ.

• **القيمة الظاهرة:** بالنسبة لقيمة الظاهرة فإنها تتميز بالنسبية، أي أنها تتغير بالزيادة أو بالنقصان، غير أنها لا تزيد باستمرار أو تتناقص باستمرار كذلك، ولكنها تتذبذب بين الزيادة والنقصان على حسب الفترة الزمنية المأخوذة من أسبوع إلى أسبوع، أو من شهر إلى شهر.

4 -**أنواع السلسلة الزمنية:** هناك عدة معايير للتصنيف، ومن أهمها:

أولا: حسب نوعية قيم السلسلة: من حيث كونها قيما متصلة أو غير متصلة، ويؤدي هذا المعيار إلى الصنفين التاليين:

1 -**سلسلة زمنية متقطعة (منفصلة):** إذا كانت مجموعة المشاهدات مأخوذة على فترات زمنية متقطعة، مثل: $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

2 -**سلسلة زمنية مستمرة (متصلة):** إذا كانت مجموعة المشاهدات مأخوذة على فترات زمنية متصلة، مثل: $T = [0,1]$.

---

[3] *G. Gourigoux, Amonfort « **Série Temporelles Et Modèles Dynamique** » 2eme Edition ed ECONOMICA* 1995*, Paris, P* 07.

[4] *J. H. Cockrane: « **Time Series For Macroeconomic and Finance**» Graduate Sckool of BUSINESS, University Of Ckicago,*1997*,2005, P* 08.

ثانيا: حسب طبيعة الزمن الذي تحدث فيه قيم السلسلة الزمنية: من حيث أن هذا الزمن محدد مسبقا أو غير محدد، ويؤدي هذا المقياس إلى الصنفين التاليين:

1 -**السلاسل الزمنية النقطية:** هي السلاسل التي تقاس قيمتها في أزمنة غير متوقعة، مثل سلاسل الكوارث، سقوط الطائرات، حوادث القطارات، حوادث السيارات، سلسلة الهزات الأرضية.

2 -**السلاسل الزمنية غير النقطية:** هي التي تقاس في أزمنة محددة مسبقا، ومن أمثلة هذه السلاسل: سلسلة أرباح شركة الإسمنت في منتصف العام، سلسلة معدل الدخل السنوي للأفراد والتي تقاس في نهاية كل عام وغيرها.

ثالثا: حسب عدد القيم التي تأخذها السلسلة عند كل قياس: يؤدي هذا المقياس إلى النوعين التاليين من السلاسل الزمنية:

1 -**السلاسل الزمنية الثنائية:** هي السلاسل التي تأخذ إحدى قيمتين، صفر أو واحد (فشل أو نجاح) وتظهر مثل هذه السلاسل في الهندسة الكهربائية وفي نظرية الاتصالات.

2 -**السلاسل الزمنية غير الثنائية:** هي التي تأخذ أكثر من قيمتين، ومن أمثلة هذه السلاسل: أعداد السكان، وأعداد المواشي.

رابعا: حسب التغيرات التي تحدث في السلسلة مع الزمن: يقصد بها تغيرات الاتجاه العام لنمو السلسلة والأمور التي تتكرر فيها، وهذا المقياس يؤدي إلى الأصناف التالية:

1 -**السلاسل ذات الاتجاه المتزايد:** هي السلاسل التي يمكن أن يتوسط نقطها خط مستقيم متزايد (ميله موجب) ومن أمثلة هذه السلاسل تلك التي تمثل أعداد السكان، سلاسل الدخل الوطني، وسلاسل حوادث السيارات.

2 -**السلاسل ذات الاتجاه المتناقص:** هي السلاسل التي يمكن أن يتوسط نقطها خط مستقيم متناقص (ميله سالب)، ومن أمثلة ذلك سلاسل مساحة الأراضي الزراعية في منطقة معينة والتي هي في تناقص مستمر بسبب انتشار الأبنية عليها.

3 -**السلاسل ذات الاتجاه الثابت:** هي السلاسل التي يمكن أن يتوسط نقطها خط مستقيم ثابت (ميله صفر)، ومن أمثلة ذلك سلسلة الطاقة الكهربائية المستهلكة في إضاءة الإشارات الضوئية، والشوارع الرئيسية في إحدى المدن.

4 -**السلاسل ذات التغيرات المتكررة على فترات متباعدة:** هي السلاسل التي يمكن أن يتوسط نقطها خط يشبه منحنى اقرب إلى دالة الجيب (أو جيب التمام) بعد تعرضه لدوران بزاوية مناسبة، وذلك لأن قيم السلسلة قد تتأثر بأمور فصلية أو سنوية، ومن أمثلة ذلك سلسلة مبيعات الملابس الصوفية التي تتم في كافة أيام السنة ولكنها تزداد في فصل الشتاء وتنقص في الصيف.

خامسا: من حيث استقرار السلسلة الزمنية: وفي هذا النوع نميز بين:

1 -**سلسلة زمنية مستقرة:** إذا كانت الخصائص الاحتمالية للسلسلة لا تتأثر بالزمن.

2 -**سلسلة زمنية غير مستقرة:** إذا كانت الخصائص الاحتمالية للسلسلة تتأثر بالزمن.

من أهم الفروض الأساسية لتحليل نماذج السلاسل الزمنية أن تركيبها الإحصائي لا يتغير خلال الزمن. والاستقرار أو السكون ينقسم إلى:

• **الإستقرارية المشدّدة (*Strict Stationarity*):** إذا كان لدينا سلسلة زمنيّة عشوائية X_t طولها "T" مشاهدة، فإنه يمكننا تقديم وصف شامل ودقيق لهذه السلسلة عن طريق تحديد دالة التّوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيّرات

X_t[5]. إنطلاقًا من هذه الفكرة، فإنه يمكن القول أنّ السلسلة X_t مستقرّة إستقرارية مشدّدة إذا كان التّوزيع الإحتمالي لـ: X_t مستقل عن الزّمن"t"[6]. أي إذا كان من أجل كل: $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in T^m$، حيث: $(m \leq T)$ و من أجل كل: $\tau \in T$ مع: $t_{i+\tau} \in T$ حيث: $(i = 1, 2, \dots, m)$. التوزيع الاحتمالي المشترك لـ: $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}\}$ هو نفسه بالنسبة لـ: $\{X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}\}$ أي:

$$f_{X_{t_1},\dots,X_{t_m}}\left(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}\right) = f_{X_{t_1+\tau},\dots,X_{t_m+\tau}}\left(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}\right)$$

وبذلك فإن السلسلة الزّمنية العشوائية المستقرّة إستقرارية مشدّدة هي سلسلة يكون متوسّطها، تباينها، وكل عزومها من الدّرجات العُليا مستقلة عن الزّمن"t". عمليًّا، فإن تحديد دالة التّوزيع الإحتمالي المشترك لمجموعة من المتغيّرات تُعدّ عملية معقّدة إلى حدّ بعيد، كما أن، افتراض استقلال هذا التّوزيع عن الزّمن هو افتراض قوي جدّا[7]، لهذا يتمّ اللّجوء إلى ما يُسمّى بالإستقرارية الضّعيفة.

- **الإستقرارية الضّعيفة (*Weak Stationarity*):** نقول عن السّلسلة الزّمنية X_t، أنّها مستقرّة -بالمعنى الواسع للإستقرارية- إذا تذبذبت حول وسطٍ ثابت، مع تباين ليس له علاقة بالزّمن "t" (نهائي)، وتباينات مشتركة (تباينات ذاتية مشتركة مرتبطة فقط بالمجال الفاصل بين الفترات الزّمنية (مستقلة عن الزّمن)، أي[8]:

$$\begin{cases} 1.\ E(X_t) = \mu = cte \qquad E(X_t^2) = \mu' = cte \\ 2. Var(X_t) = \mu' - \mu^2 = \gamma_0 = \sigma_X^2 \\ 3.\ Cov(X_t X_K) = E(X_t X_K) - \mu^2 = \gamma_h\ ; \quad K = t \pm h \end{cases}$$

وبالتّالي فإنّ السّلاسل الزّمنية التّي تحقّق الخصائص السّابقة، يكون لديها ميل للعودة إلى متوسّطها، كما أنّ الانحرافات عن هذا المتوسّط (المُعبّر عنها بتباين X_t) تكون ذات بعد ثابت.

ملاحظة: كحالة خاصة فإنّه إذا كانت المتغيّرات $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}$ تتبع توزيع طبيعي متعدّد، فإنّه يمكن وصف هذا التّوزيع كليّا بالإعتماد على العزمين الأوّل والثّاني، وفي هذه الحالة يتكافىء مفهوم الإستقرارية المشدّدة مع مفهوم الإستقرارية الضّعيفة، و هذا لا ينطبق على باقي التّوزيعات الاحتمالية[9].

5 -**الهدف من دراسة السلسلة الزمنية:** إن الهدف من دراسة السلسلة الزمنية لظاهرة معينة هو:

- الحصول على وصف دقيق للسلسلة الزمنية وإنشاء نموذج رياضي للمشاهدات (إيجاد توزيع المشاهدات)؛
- التعرف على التغيرات التي تطرأ على السلسلة الزمنية؛
- التعرف على أسباب ونتائج هذه التغيرات؛
- التعرف على العلاقة وطبيعتها بين الظاهرة ومختلف السلاسل الزمنية الأخرى؛
- التنبؤ بقيمة الظاهرة غير الموجودة في السلسلة الزمنية.

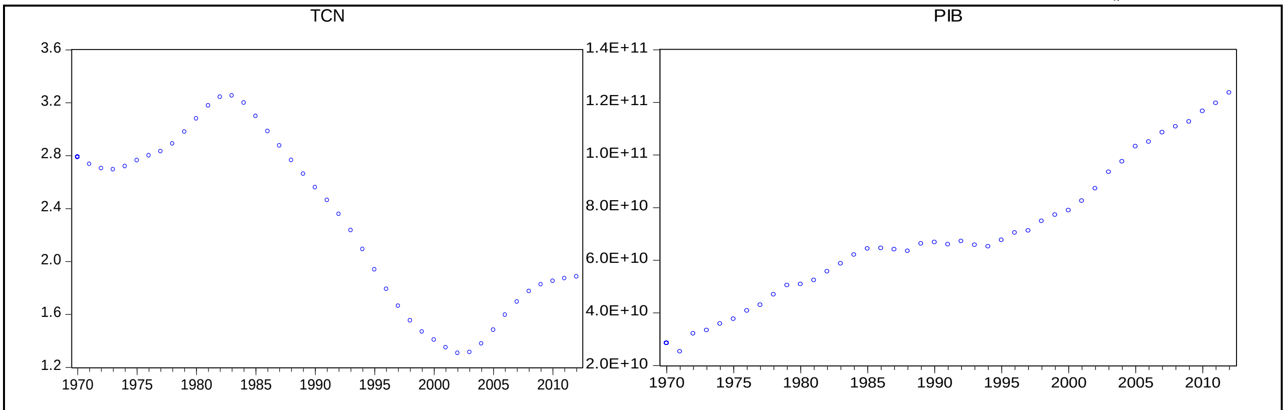
المطلب الثاني: مركبات السلسلة الزمنية.

نقصد بها العناصر المكونة للسلسلة الزمنية، وهي تفيد في تحديد سلوكها في الماضي وكذا المستقبل، ويمكن إدراج هذه المركبات في العناصر التالية[10]:

---
[5] *G. Kirchgässner, & J. wolters, «**Introduction To Modern Time Series Analysis**», Springer-verlag Berlin Heidelberg, New York 2007, P 12.*
[6] G. S. Maddala (1992), P 528.
[7] *G. S. Maddala (1992), PP 527-528.*
[8] *G. bresson, & A. pirotte, «**Econométrie Des Séries Temporelles, Théories Et Applications**», Presses Universitaires de France, paris, 1995, P 19.*
[9] *G. S. Maddala (1992), P 528-529 and G. Kirchgässner, & J.wolsters (2007), P13.*

1 -الاتجاه العام "*La Tendance*": تبين هذه المركبة المسار الذي تتبعه السلسلة الزمنية في وحدة الزمن أي تعبر عن تطور متغير ما عبر الزمن، ويبين الاتجاه العام للظاهرة المدروسة في المدى الطويل أو هو عبارة عن التغير المنتظم للمشاهدات والظواهر الاقتصادية خلال فترة زمنية سواء كان هذا التغير بالزيادة أو بالنقصان أو الاثنين معا، ويكون تغيرها إما ذو نمط تحديدي (*Determinist*) أو نمط عشوائي (*Stochastique*)، ويرمز لها عامة بالرمز T، ويمكن أن تأخذ الشكلين التاليين.

الشكل البياني رقم (1 -1): يوضح مركبة الاتجاه العام.



حالة الميل السالب حالة الميل الموجب

المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على معطيات الديوان الوطني للإحصائيات (*PIB*: الناتج الداخلي الخام، *TCN*: معدل الزيادة الطبيعي)

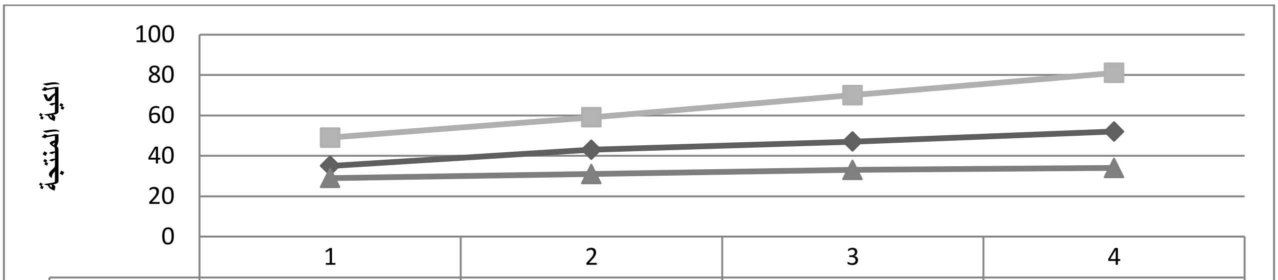
والاتجاه العام رياضيا قد يكون خطا مستقيما $(x_t = a + bt)$ أو غير خطي مثل المنحنى الأسي (قياس غير منتظم أو غير ثابت)، أو منحنى يأخذ شكل S (نمو في الأجل الطويل لمؤسسة)، أو منحنى قطع مكافئ وهو معادلة رياضية من الدرجة الثانية: $y = c + at + bt^2$، حيث: a، b، c قيم ثابتة.

ومن أمثلة ذلك الناتج الداخلي الخام في حالة التزايد والأمية بالتناقص وكمبيعات مادة ما تتطور بشكل واضح كجهاز التلفزيون الأسود والأبيض والملون أو عدد العمال للشركات التي تستخدم التكنولوجيات الحديثة.

2 -التغيرات الموسمية "*La Composante Saisonnière* ": هي التغيرات المتشابهة في مسار سلوكها والتي تظهر في فترات زمنية منتظمة ومحددة بصفة متعاقبة أي أن هذه المركبة تشير إلى التغيرات التي تظهر في الفصول متناظرة خلال الأزمنة المختلفة التي أخذت فيها مشاهدات السلسلة، وهي ناتجة عن تأثير عوامل خارجية على متغير ما، بطريقة منتظمة وذلك خلال السنة في حالة المعطيات الشهرية، الفصلية أو الأسبوعية، ويرمز لها بالرمز S. والشكل التالي يوضح ذلك.

[10] أنظر: ❖ حشمان مولود: "**نماذج و تقنيات التنبؤ القصير المدى**"، طبعة 2002، *OPU*، الجزائر، 2002، ص 12.
❖ محمد أبو صالح، عدنان محمد عوض "**مقدمة في الإحصاء**"، *USA, A Willey Arabook*، 1983 - ص 276.

الشكل البياني رقم (1 -2): يوضح مركبة الفصلية.

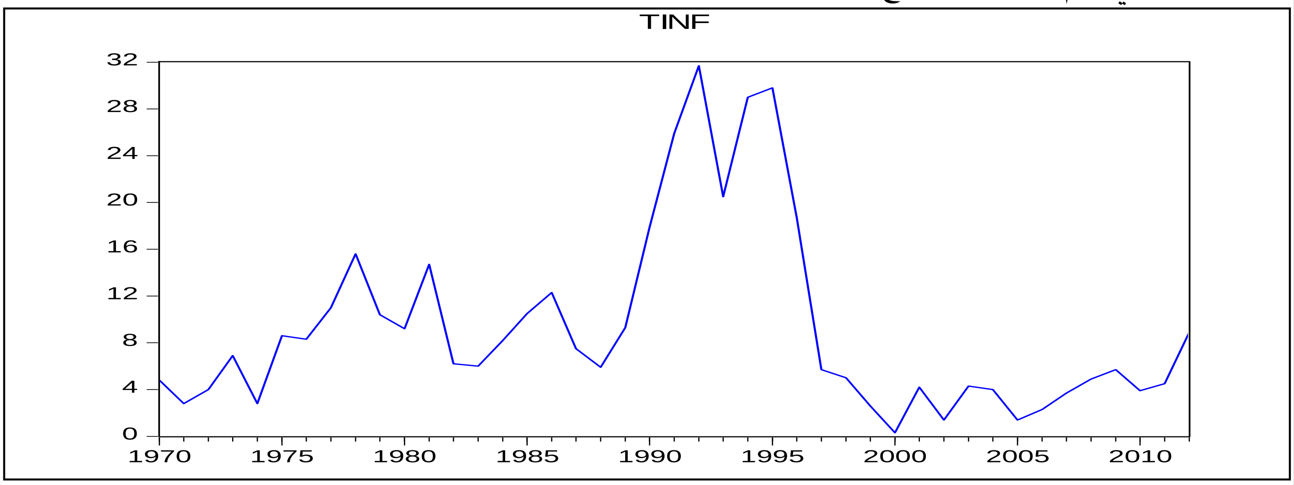


	1	2	3	4
Series1	35	43	47	52
Series2	49	59	70	81
Series3	29	31	33	34

المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على معطيات الجدول المرفق بالشكل. (*série* 1: السنة الأولى، *série* 2: السنة الثانية، *série* 3:السنة الثالثة).

3 -التغيرات الدورية (مركبة الدورات الاقتصادية) " *La Composante Cyclique* ": هي متغيرة منتظمة ذات طول غير معروف بدقة و تظهر هذه المركبة في المدى البعيد وتشمل حالتين: حالة الركود الاقتصادي وحالة الرخاء الاقتصادي، أو بتعبير آخر هي تلك التغيرات التي تطرأ على الظاهرة من خلال فترة زمنية طويلة (تتعدى السنة)، وبصفة عامة هذه المركبة تمثل تأثير عوامل خارجية على السلسلة الزمنية بشكل منتظم أو شبه منتظم، وتبرز أثر التطور الاقتصادي (التقدم التكنولوجي)، مثلا: انتقال حالة الاقتصاد من الركود إلى الانتعاش فالرواج ثم الركود وهكذا دواليك[11]، فهي تشبه التغيرات الموسمية إلا أنها تتم في فترات أطول نسبيا من الفترات الموسمية، وبالمقارنة بالتغيرات الموسمية فإن طول الفترة الزمنية غير معلوم، وبالتالي يصعب التعرف على التقلبات الدورية ومقاديرها لأنها تختلف اختلافا كبيرا من دورة لأخرى سواء من حيث طول الفترة الزمنية للدورة أو اتساع تقلباتها ومداها، ونرمز لها بالرمز "*C*". وترجع هذه المركبة لعوامل كثيرة مثل: سياسة الحكومة والعلاقات الدولية وغيرها ويقاس طول الدورة (التجارية) بطول الفترة الزمنية بين مرحلتي ازدهار متتاليتين أو ركود متتاليتين، والشكل التالي يوضح ذلك.

الشكل البياني رقم (1 -3): يوضح التغيرات الدورية.

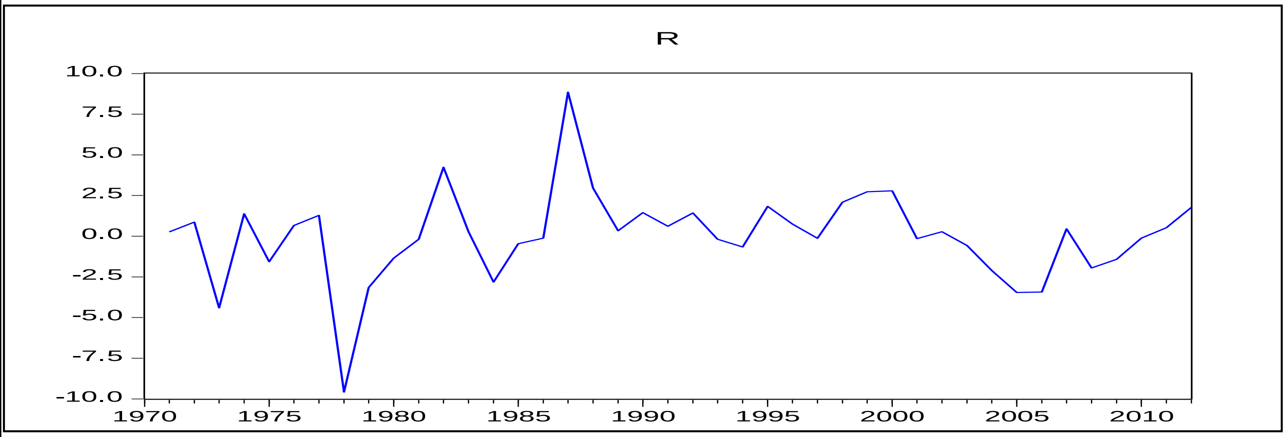


المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على معطيات الديوان الوطني للإحصائيات (*TINF*: معدل التضخم).

[11] مولود حشمان .مرجع سابق، ص 14

4 -**التغيرات العشوائية**: "***La Composante Résiduelle***": تمثل تلك التغيرات التي تقع نتيجة سبب طارئ غير متوقع، أي هي المركبة التي تصف جميع العوامل والمتغيرات التي لم تؤخذ بعين الاعتبار، أو تلك التي لا يمكن قياسها والتنبؤ بحدوثها، لكونها مفاجئة وعشوائية الحدوث مثل: الحروب، الفيضانات والزلازل التي تؤثر على المستوى الاقتصادي للبلاد، ويرمز لها بالرمز " ε "، تشير هذه التغيرات وهي غير منتظمة عادة لتحركات السلسلة الزمنية لأعلى ولأسفل، وذلك بعد استبعاد التغيرات الأخرى والاتجاه العام وتنشأ هذه التغيرات لعوامل لا يمكن التحكم بها، ومن الواضح بأنه لا يمكن التنبؤ بها لعدم انتظامها من جهة وللفترة الزمنية الصغيرة التي تحدث فيها ويسهل تأثيرها عند دراسة العناصر الأخرى للسلسلة الزمنية وغالبا يشار إليها بالتغيرات المتبقية " *Residual Variations*" لكونها تضم ما تبقى من العوامل التي لم يشار إليها في عناصر السلسلة الثلاثة السابق ذكرها وبالطبع هذا العنصر عشوائي لأنه يقع فجأة أو للصدفة والشكل التالي يوضح ذلك.

الشكل البياني رقم (1 -4): يوضح التغيرات العشوائية.



المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على معطيات عشوائية

المبحث الثاني: شكل السلسلة الزمنية وطرق الكشف عن مركباتها.

يتطلب تحليل السلسلة الزمنية صياغة نموذج رياضي يمثل السلسلة محل الدراسة، وقد توصل الباحثون إلى عدة نماذج رياضية تربط بين قيم المشاهدات من جهة، وقيم المركبات المختلفة للسلسلة الزمنية من جهة أخرى، ومن أبرز النماذج الرياضية التي تصف السلسلة الزمنية هي النموذج المضاعف، النموذج الجمعي والنموذج المختلط.

المطلب الأول: الشكل النظري للسلسلة الزمنية وأسلوب تحديدها.

كما سبقت الاشارة إليه سنستخدم الرموز التالية في السلسلة الزمنية: يستخدم الرمز "S" ليدل على المركبة الفصلية، والرمز"C" ليرمز إلى مركبة الدورات الاقتصادية، والرمز"T" ليدل على مركبة الاتجاه العام، والرمز "ε" الى المركبة العشوائية.

1 -**الشكل النظري للسلسلة الزمنية**: يمكن تحديد ثلاث أشكال نظرية للسلسلة الزمنية وهي:

1 -1 -الشـكل أو النمـوذج التجميعـي "*Modèle Additif*": هـذا الشـكل يمثل علاقـة تجميعيـة بـين مركبـات السلسـلة الزمنيـة "X_t"، وهـذا بشـرط أن تكـون المركبـات مسـتقلة عـن بعضـها الـبعض، ويعـرف رياضيا بالعلاقـة التالية:

$$X_t = T + C + S + \varepsilon$$

وسمي بالشكل التجميعي لأن قيمة المتغير التابع عبارة عن محصلة تجميعية لجميع المركبات.

1 -2 -الشكل الجدائي "*Multiplicatif*": هذا الشـكل يمثل العلاقـة الجدائيـة بـين مركبـات السلسـلة الزمنيـة "X_t"،مع وجود ارتباط بين هذه المركبات، ويعرف رياضيا بالعلاقة التالية:

$$X_t = T * C * S * \varepsilon$$

وفي هذه الحالة يمكن ارجاعه إلى نموذج تجميعي عن طريق ادخال اللوغاريتم على النحو التالي:

$$Ln(X_t) = LnT * LnC * LnS * Ln\varepsilon$$

1 -3 -الشكل المختلط: هذا الشكل يمثل علاقة تجميعية وجدائية في آن واحد بين مركبات السلسلة الزمنية "X_t" ويعرف رياضيا بالعلاقة التالية (على سبيل المثال):

$$X_t = T + C * S * \varepsilon$$

وهذا الأخير الأكثر استعمالا في المجال الاقتصادي.

1 -4 -مبدأ المحافظة على الفضاء: نميز بين الحالتين التاليتين:

- **حالـة النمـوذج التجميعـي**: مبـدأ هـذا المبـدأ هـو أن مجمـوع المعـاملات الفصـلية، وكـذلك مجمـوع الـتغيرات العشوائية تكون معدومة، أي:

$$\sum_{j=1}^{P} S_j = 0; \quad \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t = 0$$

- **حالة النموذج المضاعف**: المبدأ في هذه الحالة هـو أن متوسـط مجمـوع المعـاملات الفصـلية، وكـذلك متوسـط مجموع التغيرات العشوائية تساوي الواحد، أي:

$$\frac{1}{P}\sum_{j=1}^{P} S_j = 1; \quad \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t = 1$$

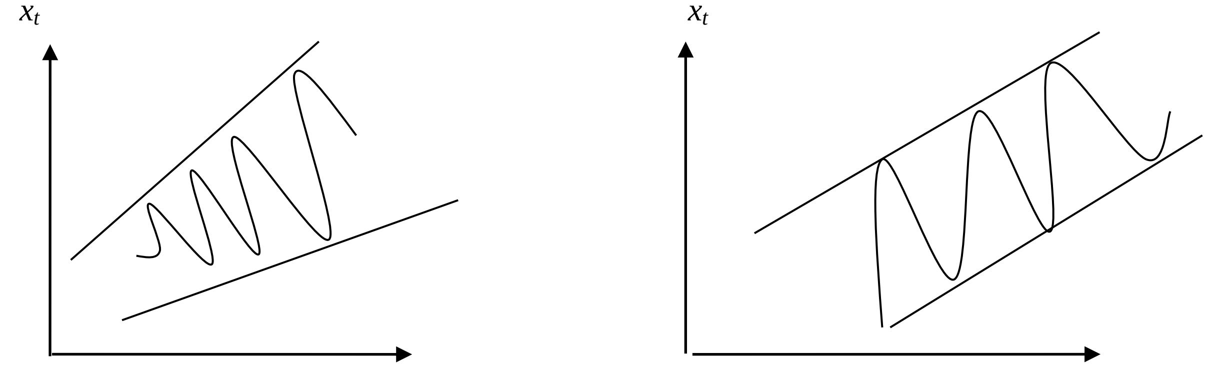
سنتناول هذا بأكثر تفصيل في المراحل المتقدمة من هذه المطبوعة.

2 -أسلوب تحديد الشكل النظري للسلسلة الزمنية: نسـتطيع الكشـف عـن الشـكل النظـري للسلسـلة الزمنيـة بأسلوبين أحدهما بياني والآخر انحداري (إحصـائي)، لكـن في أغلـب الأحيـان الأسـلوب البيـاني لا يكـون كافيـا لوحده وذلك لقلة دقته[12].

2 -1 -الأسلوب البياني: إذا كانت منحنيات السلسلة الزمنية "X_t"محصورة بين خطين متوازيين نقول بأنها ذات شـكل تجميعـي، أمـا إذا كانـت منحنيـات السلسـلة الزمنيـة "X_t" محصـورة بـين خطـين منفـرجين نقـول أنهـا ذات شكل جدائي، والشكلين التالين يوضحان ذلك.

[12] *Régis Bourbonnais et Michel Tirraza: "**Analyse Des Séries Temporelle En Economiques** ", PUF*, 1998, *P18.*

الشكل البياني رقم (1 -5): الاشكال النظرية للسلسلة الزمنية.



المصدر: من اعداد الباحث

غير أنه وبصفة عامة، يصعب تحديد وكشف مركبات السلسلة الزمنية عن طريق العرض البياني ماعدا المركبة الفصلية التي تظهر جليا بالعين المجردة ومركبة الاتجاه العام.

2 -2 -الأسلوب الإحصائي: تعتمد هذه الطريقة على الاختبار الإنحداري (*Test de Bays-Ballot*) وهذا الاختبار يرتكز على حساب المتوسط والتباين لكل سنة، ويمكننا شرح هذه الطريقة بالاعتماد على تقدير المعلمة b من المعادلة التالية التالية[13]:

$$\delta_i = a + b\overline{X_i} \qquad \forall i = 1,2,...,m$$

حيث:

$$\overline{X_i} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}$$
$$\forall i = 1,2,...,m$$
$$\forall j = 1,2,...,p$$

و:

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ij} - \overline{X_i}\right)^2}$$

m : يمثل عدد السنوات.

p : عدد أجزاء السنة (مثلا: عدد الأشهر).

وباستعمال طريقة المربعات الصغرى: MCO يمكن تقدير المعلمة b كما يلي:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \delta_i \overline{X} - m\overline{\delta}.\overline{\overline{X}}}{\sum_{i=1}^{m} \overline{X}^2 - m.\overline{\overline{X}}^2}$$

علما أن:

[13] *Régis Bourbonnais et Michel Tirraza, ibid, P21*

$$\overline{\delta}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_i, \qquad \overline{\overline{X}}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{X_i}$$

وتكون السلسلة الزمنية:

-تجميعية إذا كان: $\hat{b}<0.05$

-جدائية إذا كان: $\hat{b}>0.1$

-مختلطة إذا كان: $0.05\le\hat{b}\le 0.1$

وانطلاقا من هذه الطريقة كذلك يمكن استعمال اختبار بايز -بالوت (*Buys-Ballot*) وذلك على النحو التالي:

انطلقنا سابقا من:

$$\delta_i=a+b\overline{X_i} \qquad \forall i=1,2,...,m$$

القرار: إذا كان b معنويا لا يختلف عن الصفر (اختبار ستيودنت) فإننا نقبل فرضية النموذج التجميعي، والحالة العكسية نقبل فرضية النموذج المضاعف.

وهناك طرق أخرى، ومن بينها:

- **طريقة المتوسط الحسابي السنوي:** وفي هذه الطريقة نقوم بـ:

-حساب المتوسط الحسابي لكل سنة $\overline{X_i}=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}x_{ij}$.

-حساب الفروقات بين القيم الاصلية والمتوسط الحسابي لكل سنة $\Delta X_{ij}=x_{ij}-\overline{X_i}$.

القرار:

إذا كانت هذه القيم تشكل متتالية حسابية نقول أن النموذج تجميعي، أما إذا كانت تشكل متتالية هندسية أو تتضاعف من سنة لأخرى نقول أن النموذج مضاعف.

- **طريقة الانحرافات المعيارية:** نقوم بحساب الانحرافات المعيارية لكل سنة $\delta_i=\sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ij}-\overline{X_i}\right)^2}$.

القرار:

إذا كانت الانحرافات متقاربة يكون النموذج تجميعي، أما إذا كانت الانحرافات متباعدة نقول أن النموذج جدائي.

المطلب الثاني: الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية.

يمكن الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية بأسلوبين، وهما: اسلوب بياني والآخر تحليلي.

1 -الكشف عن مركبات الاتجاه العام:

للكشف عن مركبة الاتجاه العام هناك اختبارين أولهما بياني والآخر إحصائي.

1 -1 -الاختبار البياني: يعتمد هذا الاختبار على المنحنى البياني الممثل للسلسلة الزمنية، حيث يتمثل الاتجاه العام في تلك المركبة التي تدفع بالسلسلة الزمنية بالزيادة في حالة الميل الموجب وبالنقصان في حالة الميل السالب، ولكن نتائجه غير دقيقة بالقدر الكافي لذلك نلجأ إلى الاختبارات الإحصائية.

1 -2 -الاختبارات الإحصائية: من بين الاختبارات الإحصائية الأكثر استعمالا نجد:

أ -**طريقة الاختبارات الحرة:** سميت بالاختبارات الحرة لأنها تستعمل الأدوات الاختبارية التي لا تخضع بالضرورة لأي توزيع إحصائي فهي إذا حرة التوزيع. ومن بين الاختبارات الحرة للكشف على مركبة الاتجاه العام:

-**اختبار الفروقات**: يعتبر من الاختبارات الأكثر أهمية وهو اختبار من الاختبارات الحرة يعتمد على إشارة الفروقات من الدرجة الأولى للسلسلة كما يفترض هذا الاختبار التوزيع العشوائي للمعطيات[14]، والذي ينص على اختبار الفرضية:

H_0: عدم وجود اتجاه عام.

H_1: وجود اتجاه عام.

ويسمح لنا هذا الاختبار بالكشف عن وجود اتجاه عام للسلسلة الزمنية، وذلك عن طريق حساب الفرو قات من الدرجة الأولى: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

حيث X_t : تمثل قيمة للسلسلة الزمنية وفقا للزمن T.

ثم نقوم بحساب "S" الذي يمثل عدد الفروقات الموجبة وعندما يكون "n" حجم العينة أكبر من 12 فإن"S"يخضع لتوزيع طبيعي، ذو أمل رياضي $E(S)$ وتباين $V(S)$، أي:

$$S \sim N\big(E(S), V(S)\big)$$

حيث:

$$E(S) = \frac{n-1}{2}$$

$$V(S) = \frac{n+1}{2}$$

n : تمثل عدد المشاهدات.

نقوم بعدها بحساب Z كما يلي:

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}}$$

ونقارن قيمة Z بالقيمة المجدولة عند مستوى المعنوية $\alpha\%$.

-إذا كان $|Z| > 1.96$ نرفض H_0 ونقول أن السلسلة تحتوي على مركبة الاتجاه العام .

-وإذا كان $|Z| < 1.96$ نقبل H_0 ونقول أن السلسلة عشوائية.

-**اختبار دانيال:** يعد من بين الاختبارات السابقة ويستعين بمعامل الارتباط لسبيرمان (*Coefficient De Corrélation De Superman*)، ويعتمد هذا الاختبار على قياس الارتباط الخطي بين ترتيبين تصاعدي (R_t)، والترتيب الزمني (t)، ويكون معامل الارتباط معرف بالعلاقة الآتية:[15]:

$$r_s = \frac{cov(R_t, t)}{\sqrt{V(R_t)V(t)}}$$

حيث:

$$V(R_t) = V(t) = \frac{T^2 - 1}{12}$$

ويكون في العينة غير مكررة المشاهدات.

[14] *H. Kufmam: "**Les Chronique De La Prévision A Court Terme**", DUNOD, Paris,* 1975, *P*120.

[15] مولود. حشمان، مرجع سابق، ص 27.

$$r_s = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})(t - \bar{t})}{\sum_{t=1}^{T}(t - \bar{t})2}$$

وبمراعاة عدم تكرار الرتب المكررة (المتساوية) وتعويضها بوسطها الحسابي (عدم السماح بتكرار الرتب)، وبالتالي يصبح صياغة معامل سبيرمان كالآتي:

$$r_s = 1- 6\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - t)^2}{T(T^2 -1)}$$

حيث:

$$-1 \leq r_s \leq +1$$

يكون شكل الاختبار كالتالي:

H_0: السلسلة عشوائية (لا يوجد اتجاه عام).

H_1: يوجد اتجاه عام.

قرار الاختبار:

بعد حساب معامل الارتباط (r_s) يتم رفض H_0 وذلك حسب حجم العينة كمايلي:

- في العينات الصغيرة $T \leq 30$؛ نرفض H_0 لما يكون $|r_s| > r_{\alpha/2}$

حيث:

$r_{\alpha/2}$: القيمة المجدولة لإحصاءة سبيرمان.

- في العينات الكبيرة لما $T \geq 30$؛ نرفض فرضية العدم لما يكون:

$$|Z| > Z_{\alpha/2}$$

$$Z = \frac{r_s - E(r_s)}{\delta_{r_s}}$$

$E(r_s) = 0$ ، $\delta_{r_s} = 1/\sqrt{n-1}$

-اختبار التوالي: يصح هذا الاختبار لكشف مدى عشوائية السلسلة الزمنية، لهذا يدعى في الغالب باختبار العشوائية، وهو يستعمل في التحقق من وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية إلا أنه يعاب عليه ضعفه في كشفها. ورغم ذلك فإنه يستعان به بيداغوجيا لسهولة حسابه. وصيغته هي[16]:

$H0$: السلسلة العشوائية.

$H1$: السلسة غير العشوائية (تحتوي على مركبة الاتجاه العام).

تكوين الاختبار:

1 -ترتيب مشاهدات السلسلة الزمنية حسب الأهمية أي من الأصغر إلى الأكبر.

2 -حساب الوسيط وهي المشاهدات المقابلة للرتبة m المعطاة بالعلاقة التالية:

في حالة كون عدد المشاهدات T فرديا فإنّ:

$$m = \frac{(T-1)}{2}$$

في حالة كون عدد المشاهدات T زوجيا فإن:

$$m = \frac{T}{2}$$

[16] مولود حشمان: مرجع سابق، ص ص 18 -19.

إذن فالوسيط هو في الحالة الأولى والثانية على الترتيب كما يلي:

$$\mathrm{Md} = \mathrm{y_m} \text{، } \quad \mathrm{Md} = \frac{(\mathrm{y_m} + \mathrm{y_{m+1}})}{2}$$

حيث:

y: تمثل شعاع المشاهدات مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا وتصبح m دليلها.

3 -إعطاء إشارة سالبة (-) للقيم الأصغر من Md وموجبة (+) للقيم الأكبرمنه.

4 -حساب R المتمثل في عدد مرات توالي الإشارة من الموجب إلى السالب والعكس.

والقرار يكون: رفض H_0 إذا كان:

1 -في العينات الصغيرة ($m \leq 20$)

$R \geq R_u$
$R \leq R_L$

حيث R_u و R_L تمثل القيم المجدولة العليا والدنيا على الترتيب والقيم المناسبة تكون مقابلة للرتبة m.

2 -في العينات الكبيرة: ($m > 20$):

$$|\mathrm{Z}| > \mathrm{Z}_{\alpha/2}$$

حيث Z معطى بالعلاقة التالية:

$$|Z| = \frac{R - uR}{\delta_R}$$

مع:

$$U_R = m + 1, \delta_R = \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m-1}}$$

-اختبار نقاط الانعطاف: إنّ التسمية الواردة غير صائبة، كون الاختبار في تكوينه لا يهتم بنقاط الانعطاف بحد ذاتها، وإنما بعدد مرات الصعود والنزول للمنحنى وبتعبير آخر عدد مرات تغير الإشارة من موجب إلى سالب أو العكس، من خلال حساب الفروقات من الدرجة الأولى Δyt أين[17]:

$$\Delta \mathrm{y_t} = \mathrm{y_t} - \mathrm{y_{t-1}}$$

مع y_t تمثل السلسلة الزمنية قيد الاختبار مرتبة ترتيبا زمنيا، ويرمز له بالرمز: u.

شكل الاختبار:

H_0: السلسلة عشوائية (لا يوجد اتجاه عام).

H_1: يوجد اتجاه عام.

تكوين الاختبار:

1 -حساب الفروقات من الدرجة الأولى للسلسلة المعنية وإعطاء إشارة موجبة للفروقات الموجبة وسالبة للسالبة ومنه فرمز u هو عدد مرات تغير الإشارة في Δy_t .

2 -يستعمل لما يكون عدد المشاهدات t أكبر من 10.

والقرار يكون كما يلي: رفض H_0 إذا كان

[17] مولود حشمان، مرجع سابق، ص 23.

$$|Z| > Z_{\propto/2}$$

حيث Z معطى بالعلاقة التالية:

$$|Z| = \frac{u - u_u}{\delta_u}$$

مع:

$$\delta_u = \sqrt{\frac{16T - 29}{90}} \quad U_u = \frac{2(t-2)}{3}$$

ب -الاختبارات غير الحرة: تعد هذه الاختبارات من أهم اختبارات الكشف عن مركبة الاتجاه العام، إذ أنها لا تعمل فقط على كشفها، بل تتعدى في عملها إلى تحديد الطريقة المناسبة التي تجعل السلسلة المدروسة تؤول إلى الاستقرار، وسوف نتناولها عند دراستنا لطريقة بوكس -جينكيز بأكثر تفصيل. تتمثل في افتراض وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية إضافة إلى العشوائية مع افتراض معرفة التوزيع الاحتمالي للأخطاء، ومن بين هذه الاختبارات:

-اختبار الجذور الأحادية: (*Dicky- Fuller*): اختبار الجذور الأحادية لـ: (*DF*) يمكننا من الكشف عن مركبة الاتجاه العام، ويسمح لنا بالتعرف على الطريقة المثلى والجيدة لاستقرار السلسلة "*TS*"أو "*DS*"، ويعتمد هذا الاختبار على ثلاثة نماذج، وهي:

النموذج (1):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

النموذج (2):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

النموذج (3):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + bt + c + \varepsilon_t$$

حيث: C : ثابت.

b : معامل مركبة الاتجاه العام.

وفرضية هذا الاختبار هي:

$$\begin{cases} H_0 : \phi_1 = 0 \\ H_1 : |\phi_1| < 1 \end{cases}$$

إذا كانت الفرضية H_0 محققة في إحدى النماذج السابقة فإن السياق ليس مستقر (عشوائي)، لذلك نستعمل اختبارات القيمة $(\phi_1 - 1)$ بدلا من ϕ_1، وبالتعويض في المعادلات نستعمل ΔX_t بدلا من X_t أي $(X_t - X_{t-1})$ فتصبح النماذج كالتالي:

النموذج (1):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t$$

النموذج (2):

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

النموذج (3) :

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} + c + bt + \varepsilon_t$$

فتصبح الفرضية:

$$H_0 : \phi_1 - 1 = 0$$

ونقوم بالاختبار على النحو التالي:

-حساب $\hat{\phi}_1$ القيمة التقديرية لـ ϕ_1 وذلك باستعمال طريقة المربعات الصغرى (MCO) للنموذج (1)، (2) و(3).

-حساب t_c وذلك بإحدى الطريقتين : $t_c = n(\hat{\phi}_1 - 1)$ أو $t_c = \dfrac{\hat{\phi}_1 - 1}{\delta\hat{\phi}_1}$

ثم نقارن t_c و t_t فإذا كانت : $t_t < t_c$

نقبل الفرضية H_0 ، يوجد جذر أحادي والسياق غير مستقر، والعكس صحيح.

-**اختبار (*Dicky-Fuller*)المطور**: إن النماذج السابقة تتغير و تصبح:

النموذج (4):

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta X_{t-j+1} + \varepsilon_t$$

النموذج (5):

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta X_{t-j+1} + C + \varepsilon_t$$

النموذج (6):

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta X_{t-j+1} + C + bt + \varepsilon_t$$

ملاحظة :إن اختبارات ديكي -فولار لا تعمل فقط على كشف مركبة الاتجاه العام كما سبقت الاشارة إليه، ولكنها تعمل على تحديد الطريقة المناسبة لجعل السلسلة الزمنية تستقر، ومن أجل ذلك نميز بين نوعين من النماذج[18]:

- **السياق من نوع (*DS*):** (*Differency Stationary*): هذا السياق غير مستقر ويبرز عدم إستقرارية عشوائية "*Stochastique*"،و نقول عن السلسلة الزمنية (غير مستقرة) X_t أنها سلسلة زمنية عشوائية من نوع DS من الدرجة d إذا تطلب الأمر إجراء فروقات من الدرجة الأولى d مرة لجعل السلسلة الزمنية مستقرة، في هذه الحالة نقول عن السلسلة الناتجة عن هذه العملية أنها متكاملة من الدرجة d و نرمز لها بـ: $I(d)$. وتأخذ الشكل:

$$X_t = X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

ويمكن كتابتها كما يلي:

$$(1 - B)^d X_t = c + \varepsilon_t$$

حيث: c ثابت حقيقي، B معامل التأخر، d درجة الفروقات.

[18] *Régis Bourbonnais: "**Econométrie**"*, 4[éme] *Ed DUNOD, Paris* 2002, *P* 231.

وفي الغالب نستعمل الفروقات من الدرجة الأولى في هذا السياق أي $(d=1)$ ونكتب:

$$(1-B)X_t = c + \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

ويأخذ هذا السياق شكلين:

-إذا كان $c=0$ يسمى هذا السياق "*DS*" بدون ثابت، ويكتب:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

-إذا كانت $c \neq 0$ يسمي السياق "*DS*" بوجود ثابت، ونكتب:

$$X_t = X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

ويمكن القول أن السلاسل الزمنية من نوع *DS* من الدرجة *d* أنها تلك السلاسل الزمنية التي يقبل كثير الحدود المعطى بدلالة معامل التأخير المرافق لمركبة الإنحدار الذاتي *d* جذر أحادي[19].

• **السياق من النوع (*TS*)**: (*Trend Stationary*): هذا السياق أيضا غير مستقر ويبرز عدم إستقرارية تحديدية (*Déterministe*) وتأخذ الشكل:

$$X_t = f_t + \varepsilon_t$$

حيث f_t دالة كثير حدود للزمن (خطية أو غير خطية) و ε_t صدمات عشوائية.

يظهر جليا أن السلسلة الزمنية X_t لا ينطبق عليها تعريف الإستقرارية من الدرجة الثانية، إذ أنه يمكن بسهولة إثبات أن التوقع الرياضي للمتغيرة X_t هو دالة للزمن.

وأغلب هذا السياق انتشارا يأخذ شكل كثير حدود ذي الدرجة الأولى ويكتب من الشكل:

$$X_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

هذا السياق غير مستقر لأن متوسطه $E(X_t)$ متعلق بالزمن، لكننا نستطيع جعله مستقرا بتقدير المعالم a_0, a_1 ، بطريقة المربعات الصغرى *MCO*.

من بين الخصائص الهامة التي تميز هذا النوع من السلاسل هو عدم إستقرارية أثر الصدمات العشوائية مع مرور الزمن، إذ أن أثر الصدمة يكون عابر ومؤقت[20].

ملاحظة: قبل البدء في اختبارات ديكي فولار لابد من تحديد درجة التأخير، لأنه من خلالها يتم تحديد الاختبار الذي يجب تطبيقه (البسيط أو المطور)، ولتحقيق هذا الغرض يمكننا الإستعانة ببعض الأدوات الإحصائية مثل: معايير المعلومات (*Schwarz or Akaike*)، أو استخدام إحصائيّتي *Box-Pierce* أو *ljung-Box* ، لاختبار الارتباط الذّاتي بعد كل تأخير مُضاف، حيث نتوقف عند أول تأخير نقبل من أجله الفرضية الصِّفرية التي تفترض غياب الارتباط الذاتي للأخطاء.

2 -الكشف عن المركبة الفصلية: هناك عدة اختبارات للكشف عن المركبة الفصلية منها:

-الاختبار البياني.

-الاختبارات الإحصائية.

2 -1 -الاختبار البياني: بالاعتماد على التمثيل البياني يمكننا الكشف عن المركبة الفصلية، ففي حالة وجودها فإنه يظهر لنا قمم (*Peaks*)، أو انخفاضات بشكل منتظم وفي نفس الفترات.

---

[19] *D.N. Gujarati: « **Basic Econometrics** », 4th édition, Mc Graw-Hill / Irwincompanies Inc New York,* 2003, *P* 799.

[20] *J. Johnston, J. Dinardo, « **Economitric Methods** », 4th edition, Mc Graw – Hill, New York,* 1997, *PP* 221-222.

2 -2 -الاختبارات الإحصائية: وهي الأخرى تقسم إلى صنفين:

أ -الاختبارات الحرة: من بين الاختبارات الأكثر استعمالا نجد:

-اختبار تحليل التباين: الاختبار البياني لا يمكنه دائما الكشف عن المركبات الفصلية، لذلك نلجأ إلى اختبار تحليل التباين أواختبار "*Fisher*" ويرتكز هذا الاختبار على نقطتين أساسيتين، وهما:

-أن تكون "X_t" دورية وذلك على حسب المعطيات أي أن $n=12$ أو $n=4$.

-إزالة مركبة الاتجاه العام من السلسلة قبل الشروع في الكشف ولهذا الاختبار مبدأ أساسي، وهو:

H_0: عدم وجود المركبة الفصلية (تأثير الشهر و السنة).

H_1: وجود تأثير الشهر والسنة.

وكل ملاحظة أو مشاهدة لـ X_t لها علاقة بالسنة والشهر ونضع $X_t = X_{ij}$.

حيث:

المعامل السنوي $i=1,2,\dots,n$

المعامل الشهري $j=1,2,\dots,m$

ومنه العدد الإجمالي للملاحظات $n*m=T$

حيث:

$\overline{X}$: المتوسط الحسابي لـ X_{ij} حيث:

$$\overline{X} = \frac{1}{n.m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ij}$$

$\overline{X_j}$: المتوسط الحسابي لكل سنة:

$$\overline{X_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$$

$\overline{X_i}$: المتوسط الحسابي لكل شهر:

$$\overline{X_i} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_{ij}$$

V_T: التباين الإجمالي لـ X_j

$$V_T = \frac{1}{n.m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2$$

يمثل الجدول الشكل العام للتباين ودرجة الحرية.

مجموع المربعات	درجة الحرية	التباين
$S_M = n\sum_{j}^{m}\left(\overline{X_j}-\overline{X}\right)^2$	$m-1$	$V_M = S_M/\ (m-1)$
$S_A = m\sum_{i}^{n}\left(\overline{X_i}-\overline{X}\right)^2$	$n-1$	$V_A = S_A/\ (n-1)$
$S_R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{ij}-\overline{X_i}-\overline{X_j}-\overline{X}\right)^2$	$(m-1)(n-1)$	$V_R = S_R/\ (m-1)(n-1)$

$V_T = S_T/(n.m-1)$	$n.m-1$	$S_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{X_{ij}} - \overline{X}\right)^2$

المصدر: *Regis Bourbonnais et Michel Tirraza, Opcit, P* 13

ومنه نقوم بحساب القيمة: F_C ونقارنها مع F_{tab}.

حيث:

$$F_C = \frac{V_m}{V_R} \qquad F_{tab} = F^{\alpha}{}_{(p-1),(n-1)(p-1)}$$

وقرار الاختبار يكون:

$F_{cal} > F_{tab}$ رفض الفرضية H_0 وهذا يستلزم وجود المركبة الفصلية.

$F_{cal} < F_{tab}$ رفض الفرضية H_1 يستلزم عدم وجود المركبة الفصلية.

-اختبار كروسكال -واليس (*K-W*): هذا الاختبار لا يمكن اجراؤه إذا كانت السلسلة خالية من مركبة الاتجاه العام وعدد المشاهدات يفوق 20 مشاهدة.

H_O: لا توجد المركبة الفصلية.

H_1: توجد المركبة الفصلية.

والقيمة المحسوبة لـ: *K-W* تعطى بـ:

$$KW = \frac{12}{T(T+1)}\sum_{i=1}^{p}\frac{R_i^{\,2}}{n_i} - 3(T+1)$$

حيث:

R_i: تمثل مجموع رتب المشاهدات المقابلة للفصل *i*.

n_i: تمثل عدد المشاهدات المقابلة للفصل *i*.

P: الدورة (*Période*).

القيمة المحسوبة سابقا يتم مقارنتها مع القيمة المجدولة التالية: χ^2_{p-1} ، حيث *p*: عدد أجزاء السنة.

القرار:

$KW < \chi^2_{p-1}$: نقبل فرضية العدم.

ب -طريقة الاختبارات غير الحرة: هناك طريقتين هما:

- **الطريقة الانحدارية:** تتمثل بدورها في افتراض وجود مركبة الفصلية في السلسلة الزمنية بـ: *p* من المؤشرات بواسطة طريقة المربعات الصغرى واختبارها إحصائيا.
- **دالة الارتباط الذاتي:** تعتمد على فكرة الارتباط بين المشاهدات وفي فترات مختلفة، وتظهر الفصلية في هذه الدالة في شكل قمم وانخفاضات في فترات زمنية تعادل *p* .

المطلب الثالث: طرق الإزالة.

1 -طرق إزالة مركبة الاتجاه العام:

سنتعرض هنا إلى الطرق المناسبة لإبعاد مركبة الاتجاه العام الخطي خاصة من السلسلة الزمنية، كما يمكن استعمال وبتعديل بسيط لهذه التقنيات مع الاتجاه العام غير الخطي.

• **الفرو قات من الدرجة الأولى:** وتتم هذه العملية بحساب الفرو قات من الدرجة الأولى بتطبيق المعادلة التالية:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

أين تصبح Δy_t هي السلسلة الخالية من الاتجاه العام. (قد يلجأ الباحث أحيانا إلى تطبيق عدة درجات من الفروقات للتخلص من الاتجاه العام).

• **الطريقة الانحدارية:** إذا كان لدينا النموذج التالي:

$$Y = a + \delta.t + u_t$$

أين $a + \delta.t$ تمثل الاتجاه العام بينما u_t تمثل المركبة العشوائية ونريد إزالة مركبة الاتجاه العام نقوم أولا بتقدير معلمات مركبة الاتجاه العام باستعمال طريقة المربعات الصغرى كمايلي:

$$\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{\delta}.t$$

ومنه:

$$Y_t = \hat{a} + \hat{\delta}.t + e_t$$

وتكون هنا e_t (البواقي) هي السلسلة الخالية من الاتجاه العام.

مما سبق يمكن القول أن التعامل مع مركبة الاتجاه العام بطريقتين الأولى تتمثل في إزالة المركبة من السلسلة ثم التنبؤ بالسلسلة العشوائية الناتجة فقط، ويتم التنبؤ النهائي في الأخير بإضافة مركبة الاتجاه العام، كما يمكن نمذجة الاتجاه العام مباشرة وفق نموذج هولت ذو معلمين، وهذا ما نبينه في المراحل المتقدمة منهذه المطبوعة.

2 -**طرق إزالة الفصلية:** يكون التعامل مع الفصلية، إما إزالتها من السلسلة ثم ترد إليها في الأخير للحصول على التوقع النهائي الشامل لكل المركبات الموجودة أصلا في السلسلة، أو يمكن نمذجتها مباشرة وفق طريقة هولت ونترز ذات ثلاث معادلات والمعاملات أو طريقة *Buys-Ballot* في حالات خاصة و سوف نرى ذلك فيما بعد.

2 -1 -**الإزالة:** تقسم طرق إزالة الفصلية إلى فئتين الأولى لا تحسب المؤشرات الفصلية والثانية تحسبها إضافة لعملية الإزالة.

أ -**طرق الإزالة التي لا تحسب المؤشرات الفصلية:** نستعمل هنا كل من طريقتي المتوسطات المتحركة البسيطة والمركزة الصالحتان لإزالة الفصلية والعشوائية من السلسلة الزمنية. كما توجد طريقة الفروقات التي تصلح لإزالة الدورية من السلسلة الزمنية وتكتب رياضيا:

$$\nabla^p y_t = y_t - y_{t-p}$$

حيث أن في المعطيات الفصلية والمعطيات الشهرية هي على الترتيب: $p=4$ و$p=12$.

ب -الطرق التي تزيل الفصلية مع حساب مؤشراتها:

• **طريقة النسب الموسمية:** تستعمل هذه الطريقة الجدول والوسط الحسابي العام لحساب المؤشرات الفصلية، إلا أنها لا تفرق بين الشكل الجدائي والتجميعي أثناء الحساب.

• **طريقة المتوسطات المتحركة النسبية:** رغم كثرة مراحل حسابها إلا أنها تمتاز عن سابقتها في أنها تستطيع التفرقة بين الشكل الجدائي والشكل التجميعي للسلسلة الزمنية.

2 - 2 -النمذجة: يمكن نمذجة الفصلية بشكل مباشر وذلك باستعمال طريقة هولت و ونترز (*Holt-Winters*) التي تعكس مساهمة *Winters* بالإضافة إلى معادلتي *Holt* تلك الخاصة بالمركبة الفصلية ويمكن كتابة هذا النموذج الجديد بالتجاوب مع المركبات الثلاثة وآنيا كمايلي:

كمثال على هذه الطريقة ننطلق من نموذج تجميعي التالي:

$$x_t = c_t + s_t + e_t$$

حيث:

c_t : تمثل مركبة الاتجاه العام؛

s_t : تمثل مركبة الفصلية (الدورية) تساوي $p = s_{t+n} = s_t$ ؛

e_t : التغير العشوائي.

نسمي متوسط محلي (*Moyenne Locale*)، المعاملات الفصلية المحلية والميل المحلي حيث أن معاملاته هي من الشكل التالي:

$$X_t = p(x_t - u_{t-n}) + (1-p)(y_{t-1} + p_{t-1})$$
$$U_t = b(x_t - y_t) + (1-b)u_{t-m}$$
$$a_t = q(y_t - y_{t-1}) + (1-q)A_{t-1}$$

فهذا يعني ثلاث تمهيدات أسية آنية: a_t, u_t, y_t حيث هي على التوالي مقدرات في الزمن (t) لمركبة الاتجاه العام c_t ومعامل الفصلية s_t والمعامل الموجه (a) لخط المسار، فالمعادلة الأولى تسمح بحساب y_t بالطريقة التالية:

- $(x_t - u_{t-1})$ عبارة عن القيمة المنزوعة للفصلية للسلسلة الزمنية (x_t) بواسطة المعامل الفصلي الأخير المقدر.
- $(y_{t-1} + a_{t-1})$ مقدر لمركبة الاتجاه العام من خلال المقدر السابق (y_{t-1}) و مقدر المعامل الموجه (a_{t-1}) في الفترة $(t-1)$
- المقدر النهائي لمركبة الاتجاه في الفترة (t) عبارة عن وسط الممهد للمتغيرين السابقين.

يمكننا تقدير معامل فصلي جديد باستعمال المعادلة الثانية:

التقدير الجديد عبارة عن الوسط الممهد والفرق بين x_t, y_t والتقدير السابق، حيث أن نفس الشيء بالنسبة للتقدير الجديد للمعامل الموجه لخط انحدار مركبة الاتجاه يساوي للتقدير السابق والفرق بين y_t و y_{t-1}.

التنبؤ عند الفترة T للسلسلة الزمنية (x_t) للفترة H معطى كما يلي:

$$X_t(h) = y_t + ha_t + u_{t-12+h}$$

حيث:

y_t مركبة الاتجاه.

ha_t الزيادة في مركبة الاتجاه ما بين $H = T + h$ و T.

u_{T-12+h} معامل الفصلية.

وسنتناول مختلف طرق التنبؤ في المراحل المتقدمة من هذه المطبوعة.

خـلاصـة:

بعد أن قمنا بإعطاء بعض المفاهيم الاساسية للسلاسل الزمنية، وأهدافها وأشكالها النظرية والعوامل المؤثرة فيها، والتي تتمثل في: مركبة الاتجاه العام، المركبة الفصلية بصفة خاصة اتضح لنا أنه يجب الكشف عن هذه المركبات إما بالطرق البيانية أو الإحصائية وإزالتهما إن وجدتا، وهذا حتى تكون السلسلة مستقرة بحيث نستطيع تطبيق بعض طرق التنبؤ على المدى القصير مثل طريقة بوكس – جينكيتر، إلا أن بعض الطرق لا تحتاج إلى استقرارية السلسلة الزمنية مثل طرق التمهيد الأسي والمتوسطات المتحركة وهذا ما سنتطرق إليه في الفصل الموالي.

تطبيقات الفصل الأول.

التطبيق الأول:

المعطيات أدناه تمثل المبيعات (X_t) السداسية لمؤسسة اقتصادية خلال الفترة 1987 -2007. والمطلوب منك:

1) الكشف عن مركبات هذه السلسلة؟

2) الكشف على شكل السلسلة الزمنية باستعمال المعادلة الانحدارية؟

السنوات	الكمية المباعة	
	السداسي الأول	السداسي الثاني
1987	287	189
1988	149	112
1989	209	189
1990	401	253
1991	220	427
1992	366	375
1993	200	201
1994	198	185
1995	495	480
1996	211	226
1997	138	148
1998	262	257
1999	436	412
2000	104	113
2001	153	145
2002	62	75
2003	104	96
2004	150	145
2005	405	388
2006	963	953
2007	785	869

التطبيق الثاني:

يبين الجدول التالي مبيعات إحدى المحلات من الأدوات الكهرومنزلية خلال خمسة سنوات. والمطلوب:

ف / س	1	2	3	4
2009	30	38	32	44
2010	29	49	35	54
2011	31	59	43	65
2012	33	70	47	76
2013	34	81	52	86

1) العرض البياني لهذه السلسلة مع استنتاج مركباتها؟

2) تحديد نوع العلاقة التي تربط بين هذه المركبات وذلك باستعمال الطرق الثلاثة؟ (طريقة الوسط الحسابي السنوي، طريقة الانحراف المعياري وطريقة المعادلة الانحدارية).

التطبيق الثالث:

تبين المعطيات التالية الاستهلاك الموسمي لمادة معينة.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	155	158	163	171	153	156	162	172	162	164	173	181

والمطلوب:

1) العرض البياني؟

2) استنتج مركبات هذه السلسلة مع ذكر نوع العلاقة التي تربط بين مركباتها بيانيا؟

3) حدد نوع هذه العلاقة باستعمال الطرق الثلاثة؟

تطبيقات اضافية:

التطبيق الرابع:

لتكن المعطيات التالية، والمطلوب منك:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	104	111	117	121	129	128	133	138

التأكد من وجود مركبة الاتجاه العام باستعمال اختبار تعاقب الإشارات ثم اختبار دانيال؟

التطبيق الخامس:

بالعودة إلى معطيات التطبيق الثاني.

1) تأكد من وجود مركبة الاتجاه العام باستعمال اختبار دانيال؟

2) تأكد من وجود المركبة الفصلية باستخدام اختبار إشارة الفروقات من الدرجة الأولى ثم باستعمال اختبار كروسكال -واليس؟

التطبيق السادس:

تبين المعطيات التالية الإنتاج المحلي الخام خلال سبع سنوات.

السنة	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
t	1	2	3	4	5	6	7
PIB	285	286	306	317	383	497	735

1) اعرض بيانيا هذه السلسلة؟

2) ما هو النموذج الملائم لتمثيل هذه السلسلة؟

3) قدر معلمات النموذج؟ وما هي القيم المتوقعة للناتج المحلي الخام للسنوات: 2006، 2007؟

حلول تطبيقات الفصل الأول

حل التطبيق الأول:

1) الكشف عن مركبات هذه السلسلة: نكشف عن كل من المركبة الفصلية ومركبة الاتجاه العام باستعمال الاختبار الإحصائي.

الكشف عن المركبة الفصلية:

بما أن الاختبارات البيانية تعتمد على المشاهدة بالعين المجردة والتحليل وهذا ما يجعل نتائجها غير دقيقة لذا نلجأ إلى تأكيد هذه النتائج أو نفيها عن طريق الاختبارات الإحصائية، ومن بين الاختبارات الإحصائية التي نستعملها اختبار تحليل التباين الذي يعد من الاختبارات الإحصائية الأكثر دقة في تحديد وجود أو عدم وجود المركبة الفصلية. نقوم بتطبيق هذا الاختبار وذلك بإتباع المراحل التالية:

حساب الوسط الحسابي للسداسيات (Zj): وذلك حسب العلاقة التالية:

$$Z_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

حيث: $n = 21$

الجدول أدناه يمثل المتوسطات الحسابية للسداسيات.

السداسي	السداسي الاول	السداسي الثاني
الوسط Z_j	299,904762	297,047619

حساب الوسط الحسابي للسنوات (Zi): وذلك بالعلاقة التالية:

$$Z_i = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} X_i$$

حيث: $L = 2$

حساب الوسط الحسابي للمشاهدات (Z): ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{1}{nL}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{L} X_{ij}$$

ومنه:

$$Z = 10968947,42$$

حساب مجموع المربعات:

$$S_m = n\sum_{j=1}^{L}\left(Z_j - Z\right)^2$$

$$S_m = 887.714$$

$$S_a = L\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - Z\right)^2$$

$$S_a = 1711078.9$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{L}\left(X_{ij} - Z_i - Z_j + Z\right)^2$$

$$S_r = 41189.285$$

الجدول التالي يمثل جدول التباينات.

نوع المقدرات	مجموع المربعات	درجة الحرية	مقدرات التباين
تباين المعامل السداسي	$S_m = 887.714$	1	$v_m = 887.714$
تباين المعامل السنوي	$S_a = 1711078.9$	20	$V_a = 85553.94$
تباين المعامل العشوائي	$S_r = 41189.285$	20	$V_r = 2059.4642$

حيث:

$$V_r = \frac{S_r}{(L-1)(n-1)} \text{ و } V_a = \frac{S_a}{n-1} \text{ ، } V_m = \frac{S_m}{L-1}$$

ثم نقوم بحساب قيمة *Fisher* على النحو التالي:

$$F_c(1) = \frac{V_m}{V_r} = 0.426$$

$$F_c(2) = \frac{V_a}{V_r} = 41.54$$

حيث:

$$F_T(1) \to F_{((n-1),(n-1)(L-1))}$$

$$F_T(2) \to F_{((L-1),(n-1)(L-1))}$$

ولدينا من جدول التوزيع الاحصائي لـ: *Fisher* ما يلي:

$$F_T = F_{(20.20)} = 2.08$$

$$F_T = F_{(1.20)} = 4.35$$

وبالمقارنة لدينا:

$F_c < F_t \Leftarrow$ عدم وجود التأثير السداسي.

$F_c(2) > F_t(2) \Leftarrow$ وجود التأثير السنوي.

ومنه نستنتج أن السلسلة الزمنية لا تحتوي على المركبة الفصلية.

الكشف عن مركبة الاتجاه العام:

نستعمل اختبار الجدور الأحادية (ديكي فولار المطور)، أي نقوم بتقدير النماذج (4)، (5)، (6) للسلسلة الأصلية.

الجدول يمثل اختبار ديكي فولار المطور للسلسلة.

النماذج	**إحصائية ستيودنت**	**اختبار *ADF***	**القيمة الحرجة** $\alpha = 0.05$
(4)	$t_{\hat{\phi}}$	0.49	-1.95
(5)	$t_{\hat{\phi}}$	-0.83	-2.94
(6)	$t_{\hat{\phi}}$	-0.70	-3.53

المصدر: مخرجات برمجية *Eviews*

يلاحظ من خلال الجدول أن القيمة الحسابية t_c لكل النماذج أكبر تماما من القيمة المجدولة t_t ومنه نقبل الفرضية H_0: $(\phi = 1)$ وبالتالي نستنتج وجود مركبة الاتجاه العام.

2) الكشف عن شكل السلسلة الزمنية: نعتمد على طريقة الاختبار الإنحداري التي تعتبر من أنجع الطرق الإحصائية لتحديد الشكل النظري الذي تخضع له السلسلة الزمنية، حيث أن مبدؤها الأساسي يتمثل في تقدير المعلمة $\hat{b}$ بتطبيق طريقة المربعات الصغرى (MCO) حيث أن $\hat{b}$ معطاة بالصيغة التالية:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \delta_i \bar{X}_i - m\bar{\delta}\bar{\bar{X}}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i^{\,2} - m\bar{\bar{x}}^2}$$

حيث:

δ_i : تمثل الانحراف المعياري لكل سنة.

$\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي لكل سنة.

$\bar{\bar{X}}$: يمثل المتوسط الحسابي الإجمالي (لكل السنوات).

m : يمثل عدد السنوات.

$\bar{\delta}$: يمثل المتوسط الحسابي للانحراف المعياري الإجمالي (لكل السنوات).

وتكون عملية التطبيق العددي كما يلي:

جدول يبين المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لكل سنة.

السنة	المتوسط السنوي	الانحراف المعياري	السنة	المتوسط السنوي	الانحراف المعياري
1987	238	49	1998	259,5	2,5
1988	130,5	18,5	1999	424	12
1989	199	10	2000	108,5	4,5
1990	327	74	2001	149	4
1991	323,5	103,5	2002	68,5	6,5
1992	370,5	4,5	2003	100	4
1993	200,5	0,5	2004	147,5	2,5
1994	191,5	6,5	2005	396,5	8,5
1995	487,5	7,5	2006	958	5
1996	218,5	7,5	2007	827	42
1997	143	5			

عدد السنوات $m=21$

وبتطبيق العلاقة السابقة، نجد:

$$\hat{b} = \frac{133698 - 112824}{292190 - 187848} = 0.01987$$

إذن

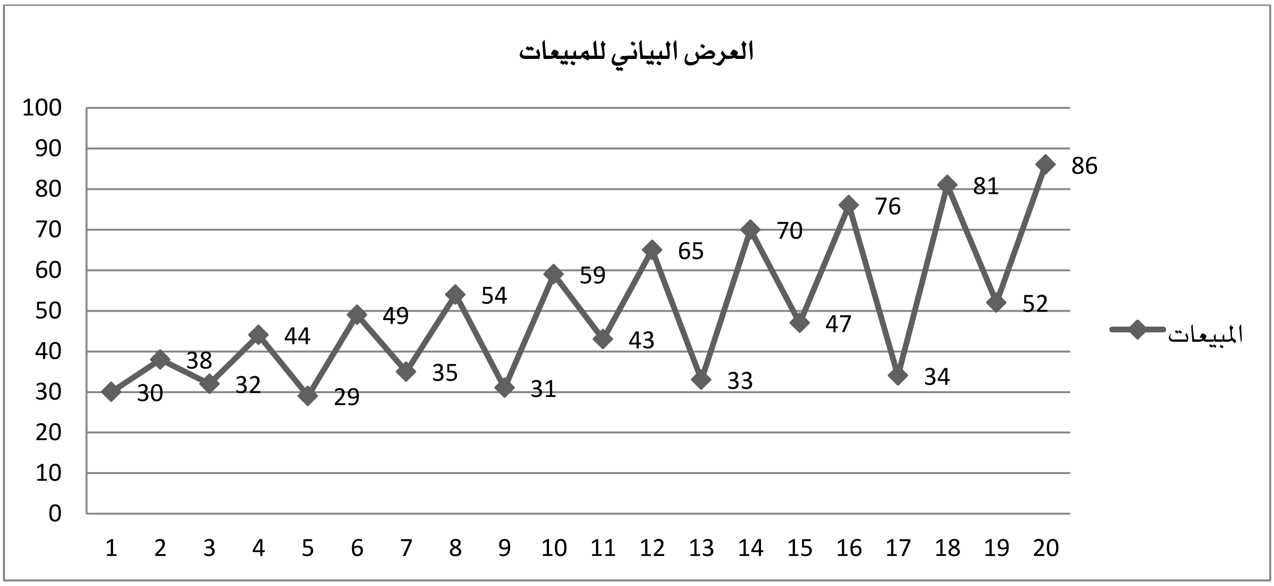
$\hat{b} = 0.01987 < 0.05$ وعليه فالسلسلة الزمنية X_t ذات شكل تجميعي.

ويكتب بالشكل:

$$X_t = L_t + C_t + S_t + \varepsilon_t$$

حل التطبيق الثاني:

1) العرض البياني:



استنتاج مركبات هذه السلسلة:

• مركبة الاتجاه العام: كما سبقت اليه الاشارة هذه المركبة عبارة عن التغير المنتظم للمشاهدات والظواهر الاقتصادية خلال فترة زمنية سواء كان هذا التغير بالزيادة أو بالنقصان أو الاثنين معا، وهذا ما يتضح جليا من خلال التمثيل البياني.

• المركبة الفصلية: هي الاخرى تعبر عن التغيرات التي تظهر في الفصول متناظرة خلال الأزمنة المختلفة التي أخذت فيها مشاهدات السلسلة، وهي ناتجة عن تأثير عوامل خارجية على متغير ما، بطريقة منتظمة وذلك خلال السنة، وهذا ما نلاحظه من خلال وجود قمة في نهاية كل سنة.

أما المركبتين الباقيتين يصعب الكشف عنهما بيانيا.

2) تحديد نوع العلاقة التي تربط بين هذه المركبات باستعمال الطرق الثلاثة:

نقوم بحساب مختلف المجاميع التي نحتاجها وهو ما يبينه الجدول التالي:

س/ف	1	2	3	4	المجموع	المتوسط	الانحراف المعياري
2009	30	38	32	44	144	36.00	6,32455532
2010	29	49	35	54	167	41,75	11,7011395
2011	31	59	43	65	198	49.50	15,4380482
2012	33	70	47	76	226	56.50	20,0416234
2013	34	81	52	86	253	63,25	24,5950537

• طريقة الوسط الحسابي السنوي: يتم حساب المتوسط الحسابي لكل سنة ومن ثم نقوم بحساب الفروقات بالنسبة للمتوسط الحسابي لكل سنة.

الفروقات بالنسبة للمتوسط الحسابي			
1	2	3	4

-6	2	-4	8
-12.75	07.25	-06.75	12.25
-18.5	9.5	-6.5	15.5
-23.5	13.5	-9.5	19.5
-29.25	17.75	-11.25	22.75

القرار:

نلاحظ أن الفروقات بالنسبة للفصل الأول بالتقريب تتضاعف من سنة لأخرى ومنه النموذج مضاعف.

- طريقة الانحراف المعياري:

من خلال الجدول الأول نلاحظ أن الانحرافات متباعدة ومنه النموذج مضاعف.

- طريقة المعادلة الانحدارية:

بالاستعانة ببرنامج *Eviews*، ووضع: x: المتوسط الحسابي، y: الانحرافات المعيارية. ونقوم بتقدير المعادلة: $Y = b(1)*X + b(2)$.

$Y = 0.645850342187*X - 16.2849228722$

ومنه قيمة $b(1)$ أكبر من 0.05 وأقل من 0.1 فالنموذج مضاعف.

حل التطبيق الثالث:

يحل بنفس طريقة التطبيق السابق.