المحور الرابع: مقاييس النزعة المركزية

The fourth axis: Measures of Central Tendancy

محتوى المحاضرة الخامسة

تمهيد: مفهوم مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendancy

أولا : الوسط الحسابيArithmetic Mean

I- في حالة بيانات غير مبوبة

1- الطريقة المباشرة

2- طريقة الانحراف حول وسط فرضي

II- في حالة بيانات مبوبة في جدول تكراري

1- بيانات كمية متقطعة

2- بيانات كمية مستمرة

III- خصائص الوسط الحسابي

IV- مشتقات الوسط الحسابي: الوسط الهندسي، الوسط التوافقي والوسط التربيعي

تمهيد: مفهوم مقاييس النزعة المركزية

تعرف" النزعة المركزية "بأنها " ميل معظم المفردات المختلفة لعينة ما للتجمع حول نقطة أو قيمة واحدة ، ولتقدير هذه القيمة في بيانات غير مبوبة أو بيانات مبوبة في جدول تكراري نستخدم ما يعرف بـ" **مقاييس النزعة المركزية** أو مقاييس الموضع أو المتوسطات "، وهي القيم التي تتركز كل القيم حولها وتستخدم للتعرف على مدى تجانس هذه القيم أو لوصف التوزيع، أو للمقارنة بين مجموعتين من البيانات أو أكثر، وأهم هذه المقاييس: الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال.

أولا: الوسط الحسابي (Mean)

يعتبر من أشهر مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما، ويعرف بشكل عام على أنه مجموع قيم مفردات العينة مقسوما على عددها، ويرمز له بالرمز $\bar{\mathbf{X}}$. ويمكن حسابه بالطرق التالية والتي تختلف باختلاف نوع البيانات:

I- في حالة بيانات غير مبوبة

1- الطريقة المباشرة:

يحسب الوسط الحسابي بالمعادلة التالية:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$$

حيث: $\bar{\mathbf{X}}$ الوسط الحسابي ، X_i مفردات العينة، N عدد المفردات

مثال 1 :

إليك علامات طالب في كلية الاقتصاد:

إقتصاد جزئي	مدخل للاقتصاد	محاسبة مالية	رياضيات	إحصاء	**مدخل لعلم اجتماع المنظمات**	**المدخل للقانون**	**لغة انجليزية**
14	12	10	16	15	10	9	13

أحسب الوسط الحسابي لعلامات هذا الطالب (المعدل)؟

الحل:

$$\bar{X}= \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} \Rightarrow \bar{X}= \frac{14+12+10+16+15+10+9+13}{8} = \frac{99}{8} = 12.375$$

أي أن متوسط علامات هذا الطالب هو: **12.375**

ملاحظة:

عندما يكون لكل قيمة من قيم المتغير أهمية نسبية تسمى أوزان، أو ترجيحات، نستعمل **الوسط الحسابي المرجح (The Weighted Mean)**، وذلك حتى تصبح قيمته دقيقة. فإذا كان المتغير X على التوالي يأخذ القيم التالية: $X_1, X_2, X_3, \ldots X_K$ بأوزان: $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$، فإن الوسط الحسابي المرجح لهذه القيم هو:

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \cdots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

مثال2:

أحسب الوسط الحسابي لعلامات الطالب في المثال 1 إذا كان معاملات المقاييس السابقة كما يلي:

المقاييس	إقتصاد جزئي	مدخل للاقتصاد	محاسبة مالية	رياضيات	إحصاء	مدخل لعلم اجتماع المنظمات	المدخل للقانون	لغة انجليزية
العلامات x_i	14	12	10	16	15	10	9	13
المعاملات n_i	3	3	3	2	3	1	1	1

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \cdots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$\bar{X}= \frac{14(3)+12(3)+10(3)+16(2)+15(3)+10(1)+9(1)+13(1)}{3+3+3+2+3+1+1+1} \Rightarrow \bar{X} = \frac{217}{17} \Rightarrow \bar{X} = 12.76$$

2- طريقة الانحراف حول وسط فرضي:

الغرض من هذه الطريقة هو تسهيل الحسابات خاصة إذا كان عدد البيانات كبير، و هذا باختيار وسط فرضي والذي من الأفضل أن يكون أقرب ما يمكن من الوسط الحقيقي للسلسلة الإحصائية، ويحسب كما يلي:

$$\bar{X}= A + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{N}$$

حيث: $\bar{X}$ الوسط الحسابي، A الوسط الفرضي، N عدد المفردات

انحراف القيمة عن الوسط الفرضي، أي: $di= x_i - A$

مثال3:

أحسب الوسط الحسابي لبيانات المثال 1 باستخدام طريقة الانحراف حول وسط فرضي؟

الحل: نختار الوسط الفرضي A = 12:

	لغة انجليزية	المدخل للقانون	مدخل لعلم اجتماع المنظمات	إحصاء	رياضيات	محاسبة مالية	مدخل للاقتصاد	إقتصاد جزئي	المقاييس
$\sum$	13	9	10	15	16	10	12	14	العلامات x_i
3	1	-3	-2	3	4	-2	0	2	$di= x_i - A$

$$\bar{X}= A + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{N} \Rightarrow \bar{X} = 12 + \frac{3}{8} \Rightarrow \bar{X} = 12.375$$

II- في حالة بيانات مبوبة في جدول تكراري:

1- بيانات كمية متقطعة:

إذا كان المتغير X يعبر عن بيانات كمية متقطعة ويأخذ القيم التالية على التوالي: $X_1,X_2,X_3,\ldots Xn$ التي تقابلها التكرارات التالية: $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots f_n$ ، فإن الوسط الحسابي يكون كما يلي:

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1+f_2X_2+f_3X_3+\cdots+f_nX_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_iX_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

والوسط الحسابي باستخدام طريقة الانحراف حول وسط فرضي يكون كما يلي:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i - A)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال4:

تمثل البيانات التالية توزيع عينة من 20 مؤسسة حسب عدد العمال:

x_i (عدد العمال)	70	80	100	120	130	$\sum$
f_i (عدد المؤسسات)	5	6	2	3	4	20

المطلوب:

أحسب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة و بطريقة الانحراف حول وسط فرضي؟

الحل:

- **حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة:**

x_i (عدد العمال)	f_i (عدد المؤسسات)	f_ix_i	$X_i - A$	$f_i(X_i - A)$
70	5	350	-10	-50
80	6	480	0	0
100	2	200	20	40
120	3	360	40	120
130	4	520	50	200
$\sum$	20	1910	/	310

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_iX_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{1910}{20} = 95.5 \approx 96$$

- حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحراف حول وسط فرضي:

نختار الوسط الفرضي A = 80:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i(X_i - A)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = 80 + \frac{310}{20} = 95.5 \approx 96$$

2- بيانات كمية مستمرة:

رأينا سابقا أنه إذا كان المتغير المدروس كمي مستمر فإن قيم هذا المتغير توضع في جدول توزيع تكراري في شكل فئات، فإذا كانت $m_1, m_2, \cdots, m_n$ هي مراكز هذه الفئات، و $f_1, f_2, \cdots, f_k$ هي التكرارات المقابلة لها، فإن الوسط الحسابي يحسب بالمعادلة التالية:

$$\bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + f_3 m_3 + \cdots + f_n m_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

والوسط الحسابي باستخدام طريقة الإنحراف حول وسط فرضي يكون كما يلي:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (m_i - A)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال5:

الجدول التالي يعرض توزيع 40 تلميذ حسب أوزانهم

فئات الوزن	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
عدد التلاميذ	4	7	13	10	5	1

المطلوب إيجاد الوسط الحسابي بالطريقتين؟

الحل:

- **حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة:**

فئات الوزن (x_i)	التكرارات f_i	مراكز الفئات m_i	$f_i m_i$	$m_i - A$	$f_i(m_i - A)$
32-34	4	(32+34) ÷ 2=33	4×33=132	-4	-16
34-36	7	35	7×35=245	-2	-14
36-38	13	37	13×37=481	0	0
38-40	10	39	10×39=390	2	20
40-42	5	41	5×41=205	4	20
42-44	1	43	1×43=43	6	6
المجموع	40	/	1496	/	16

إذا الوسط الحسابي لوزن التلاميذ هو :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i m_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{1496}{40} = 37.4\,kg$$

أي أن **متوسط وزن التلاميذ يساوي 37.4 كغ**

- **حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحراف حول وسط فرضي:**

نختار الوسط الفرضي A = 37:

$$\bar{\mathbf{X}}= A + \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i(m_i - A)}{\sum_{i=1}^{6} f_i} \Rightarrow \bar{\mathbf{X}} = 37 + \frac{16}{40} \Rightarrow \bar{\mathbf{X}} = 37.4\,\mathbf{kg}$$

III- خصائص الوسط الحسابي:

يتصف الوسط الحسابي بعدد من الخصائص، ومن هذه الخصائص ما يلي:

1- يتأثر الوسط الحسابي بوجود قيم متطرفة.

2- لا يمكن تحديد الوسط الحسابي بيانيا.

3- يتعذر حساب الوسط الحسابي في الجداول المفتوحة.

4- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوى صفرا، ويعبر عن هذه الخاصية بالمعادلة:

$$\sum(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

5- الوسط الحسابي للمقدار الثابت يساوى الثابت نفسه، أي أنه إذا كانت قيم X هي: $a,\ a, \cdots, a$ فإن الوسط الحسابي هو:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{a+a+a+\cdots+a}{n} = \frac{na}{n} = \mathbf{a}$$

6- إذا أضيف مقدار ثابت (a) إلى كل قيمة من القيم، فإن الوسط الحسابي للقيم المعدلة (بعد الإضافة) يساوى الوسط الحسابي للقيم الأصلية (قبل الإضافة) مضافا إليها هذا المقدار الثابت.

7- إذا ضرب مقدار ثابت (a) في كل قيمة من القيم، فإن الوسط الحسابي للقيم المعدلة (القيم الناتجة بعد الضرب) يساوى الوسط الحسابي للقيم الأصلية (القيم بعد التعديل) مضروبا في هذا المقدار الثابت.

IV- مشتقات الوسط الحسابي:

1- الوسط الهندسي(Geometric Mean):

الوسط الهندسي لأي مجموعة من القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم. ويرمز له بالرمز: $\bar{\mathbf{X}}_{\boldsymbol{G}}$، تعتبر مجالات استخدامه قليلة مقارنة بالوسط الحسابي، ومن أهم المجالات التي يستخدم فيها في المجال الإقتصادي هي في حساب الأرقام القياسية، كما يستخدم في ايجاد متوسط نسب التغير لبعض الظواهر مثل: معدل النمو الإقتصادي ومعدلات الفائدة....إلخ.

أ- في حالة بيانات غير مبوبة:

$$\bar{\mathbf{X}}_{\boldsymbol{G}} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots \ldots x_n} = (x_1 . x_2 . x_3 \ \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

أو باستعمال اللوغاريتم:

$$\bar{\mathbf{X}}_{\boldsymbol{G}} = \mathbf{10}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \log x_i}$$

مثال6:

أحسب الوسط الهندسي للبيانات التالية: 8، 5، 6، 10، 3، 4، 2، 3

الحل:

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . X_3 \dots \dots X_n} = \sqrt[8]{8.5.6.10.3.4.2.3} \Rightarrow \bar{\mathbf{X}}_G = 4,5$$

$$\bar{X}_G = 10^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \log x_i} = 10^{\frac{1}{8}\sum(\log 8 + \text{Log}5 + \log 6 + \log 10 + \log 3 + \log 4 + \text{Log}2 + \log 3)}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{X}}_G = 4,5$$

ب- **<u>في حالة بيانات مبوبة:</u>**

- **<u>في حالة بيانات متقطعة:</u>**

$$\bar{\mathbf{X}}_G = \sqrt[N]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} . x_3^{f_3} \dots \dots x_n^{f_n}} = (x_1^{f_1} . x_2^{f_2} . x_3^{f_3} \dots \dots x_n^{f_n})^{\frac{1}{n}}$$

أو باستعمال اللوغاريتم: $\bar{\mathbf{X}}_G = \mathbf{10}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i}$

- **<u>في حالة بيانات مستمرة:</u>**

$$\bar{\mathbf{X}}_G = \sqrt[N]{m_1^{f_1} . m_2^{f_2} . m_3^{f_3} \dots \dots m_n^{f_n}} = (m_1^{f_1} . m_2^{f_2} . m_3^{f_3} \dots \dots m_n^{f_n})^{\frac{1}{n}}$$

أو باستعمال اللوغاريتم: $\bar{\mathbf{X}}_G = \mathbf{10}^{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \log m_i}$

<u>مثال7:</u>

باستخدام بيانات المثال 4، أحسب الوسط الحسابي الهندسي؟

x_i (عدد العمال)	f_i (عدد المؤسسات)	$x_i^{f_i}$	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
7	5	16807	0,84	4,2
8	6	262144	0,9	5,4
10	2	100	1	2
12	3	1728	1,07	3,21
13	4	28561	1,11	4,44
$\sum$	20	$2,17 \times 10^{19}$	/	19,25

$$\bar{X}_G = \sqrt[N]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} . x_3^{f_3} \dots \dots x_n^{f_n}} = \sqrt[20]{2,17 \times 10^{19}} = 9,26 \Rightarrow \bar{\mathbf{X}}_G \approx 9$$

$$\bar{X}_G = 10^{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i} = 10^{\frac{1}{20}\ 19,25} = 9,17 \Rightarrow \bar{\mathbf{X}}_G \approx 9$$ (باللوغاريتم أسهل)

2- **<u>الوسط التربيعي(Quadratic Mean):</u>**

الوسط التربيعي لأي مجموعة من القيم $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات القيم.

أ- **<u>في حالة بيانات غير مبوبة:</u>**

$$\bar{\mathbf{X}}_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \dots + x_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N}}$$

مثال8:

أحسب الوسط التربيعي لبيانات القيم 2، 3، 6، 7؟

$$\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{2^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2}{4}} = \sqrt{\frac{98}{4}} \Rightarrow \bar{X}_Q = 4{,}95$$

ب- في حالة بيانات مبوبة:

إذا كانت البيانات مبوبة فإن القانون السابق المستخدم في حالة البيانات غير المبوبة (الأولية) يصبح مرجحابالتكرارات المقابلة، أي:

- **في حالة بيانات متقطعة:**

$$\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 \ldots + f_n x_n^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{N}}$$

- **في حالة بيانات مستمرة:**

$$\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{f_1 m_1^2 + f_2 m_2^2 + f_3 m_3^2 \ldots + f_n m_n^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i^2}{N}}$$

مثال9:

أحسب الوسط التربيعي لبيانات المثال 5:

فئات الوزن x_i	التكرارات f_i	مراكز الفئات m_i	m_i^2	$f_i m_i^2$
32-34	4	(32+34) ÷ 2=33	1089	4356
34-36	7	35	1225	8575
36-38	13	37	1369	17797
38-40	10	39	1521	15210
40-42	5	41	1681	8405
42-44	1	43	1849	1849
المجموع	40	/	/	56191

$$\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} f_i m_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{56191}{40}} = \sqrt{1404{,}775} \Rightarrow \bar{X}_Q = 37{,}48\,kg$$

3- **الوسط التوافقي(Harmonic Mean):**

الوسط التوافقي لأي مجموعة من القيم x1, x2, x3, ...xn هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم، ويستعمل فقط في حالة وجود علاقة عكسية بين ظاهرتين.

أ- **في حالة بيانات غير مبوبة:**

$$\bar{X}_H = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \cdots + \frac{1}{X_n}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

مثال10:

أحسب الوسط التوافقي للقيم التالية: 2، 3، 6، 7(المثال8)؟

$$\bar{X}_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}} = \frac{4}{\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{4}{1,14} \Rightarrow \bar{X}_H = 3,5$$

ب- في حالة بيانات مبوبة:

يعرف الوسط التوافقي في حالة توزيع تكراري بالعلاقة التالية:

- **في حالة بيانات متقطعة:**

$$\bar{X}_H = \frac{N}{\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\frac{f_3}{X_3}+\cdots+\frac{f_n}{X_n}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}}$$

- **في حالة بيانات مستمرة:**

$$\bar{X}_H = \frac{N}{\frac{f_1}{m_1}+\frac{f_2}{m_2}+\frac{f_3}{m_3}+\cdots+\frac{f_n}{m_n}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}}$$

مثال11:

أحسب الوسط التوافقي للبيانات المثال السابق:

فئات الوزن x_i	التكرارات f_i	مراكز الفئات m_i	$\frac{f_i}{m_i}$
32-34	4	(32+34) ÷ 2=33	4 ÷ 33=0,12
34-36	7	35	0,2
36-38	13	37	0,37
38-40	10	39	0,25
40-42	5	41	0,12
42-44	1	43	0,02
المجموع	40	/	1.08

$$\bar{X}_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{6} \frac{f_i}{x_i}} = \frac{40}{1,08} \Rightarrow \bar{X}_H = 37,03\ kg$$