المحور الرابع: مقاييس النزعة المركزية

The fourth axis: Measures of Central Tendancy

محتوى المحاضرة السابعة

ثالثا: الوسيط Median

I- الوسيط في حالة بيانات غير مبوبة

II- الوسيط في حالة بيانات مبوبة في جدول تكراري

1- بيانات كمية متقطعة

2- بيانات كمية مستمرة

III- شبهات الوسيط: الربيعيات، العشيريات، الميئيات

ثالثا: الوسيط (Median):

يعرف الوسيط بأنه القيمة التي تقسم البيانات المرتبة تصاعديا أو تنازليا إلى قسمين متساويين، حيث يكون عدد القيم الأكبر منه مساويا لعدد القيم الأصغر منه، و يرمز له بالرمز Me. ويحسب كما يلي:

I- الوسيط في حالة بيانات غير مبوبة:

لمعرفة قيمة الوسيط لبيانات أولية (غير مبوبة) نقوم أولا بترتيبها تصاعديا أو تنازليا، ثم نحدد رتبة الوسيط والتي تساوي $(\frac{N+1}{2})$.

مثال1:

تمثل السلسلتين التاليتين أحسب وسيط كل سلسلة من السلسلتين التاليتين:

6 ، 9، 5، 7، 5، 6، 8

7 ، 6 ، 9، 5، 7، 5، 6، 8

الحل:

- **بالنسبة للسلسلة الأولى نرتب القيم تصاعديا:**

$M_e = 6$

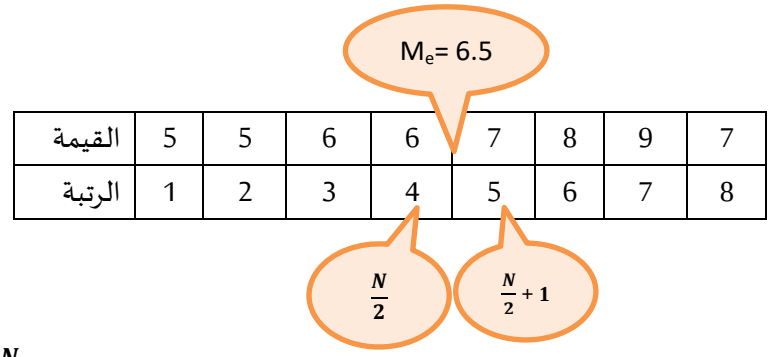
القيمة	5	5	6	6	7	8	9
الرتبة	1	2	3	4	5	6	7

$\frac{N+1}{2}$

نلاحظ أن عدد القيم فردي (n=7)، إذا فإن قيمة الوسيط هي القيمة التي رتبتها $(\frac{N+1}{2})$

أي: $M_e = X_{\frac{n+1}{2}} = X_{\frac{7+1}{2}} = X_4 = 6$

✓ **بالنسبة للسلسلة الثانية نرتب القيم تصاعديا:**



القيمة	5	5	6	6	7	8	9	7
الرتبة	1	2	3	4	5	6	7	8

نلاحظ أن عدد القيم زوجي (n=8)، إذا فإن قيمة الوسيط هي متوسط القيمتين اللتين رتبتهما $(\frac{N}{2})$ و$\frac{N}{2}+1$.

$$M_e = X_{\frac{n+1}{2}} = X_{\frac{8+1}{2}} = X_{4,5}$$

$$M_e = \frac{X_4 + X_5}{2} = \frac{6+7}{2} = 6.5 \quad \text{أي:}$$

$$M_e = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{X_{\frac{8}{2}} + X_{\frac{8}{2}+1}}{2} = \frac{X_4 + X_5}{2} = \frac{6+7}{2} = 6.5 \quad \text{أو:}$$

ملاحظة:

إذا كان **فرديا** فإن الوسيط هو القيمة التي رتبتها$(\frac{N+1}{2})$، وإذا كان **زوجيا** فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين رتبتهما $(\frac{N}{2})$ و$\frac{N}{2}+1$.

II- الوسيط في حالة بيانات مبوبة في جدول تكراري:

1- في حالة بيانات كمية متقطعة:

لحساب الوسيط من جدول تكراري لمتغير كمي متقطع نتبع الخطوات التالية:

✓ تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(cf_i\uparrow)$.

✓ تحديد رتبة الوسيط بقسمة مجموع التكرارات على اثنين $(\frac{N}{2})$.

✓ البحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(cf_i\uparrow)$ عن القيمة التي تساوي رتبة الوسيط $(\frac{N}{2})$ أو الأكبر منها مباشرة.

✓ قيمة الوسيط هي x_i التي تقابل رتبة الوسيط $(\frac{N}{2})$ أو الاكبر منها مباشرة.

مثال2:

يمثل الجدول التالي توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الاطفال:

(عدد الأطفال)	2	3	4	5	$\sum$
(عدد الأسر)	7	4	6	3	20

أوجد قيمة الوسيط حسابيا وبيانيا؟

الحل:

✓ **ايجاد قيمة الوسيط حسابيا:**

x_i (عدد الأطفال)	f_i (عدد الاسر)	$cf_i\uparrow$
1	5	5
2	7	12
3	4	16
4	6	22
5	3	25
$\sum$	25	/

$M_e = 3$

✓ تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(cf_i\uparrow)$.

✓ تحديد رتبة الوسيط: $\frac{N}{2} = \frac{25}{2}$=12.5

✓ نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(cf_i\uparrow)$ عن القيمة 12.5 غير موجودة إذا نأخذ القيمة الاكبر منها مباشرة وهي 16.

✓ قيمة الوسيط هي x_i التي تقابل رتبة الوسيط $(\frac{N}{2})$ أو الأكبر منها مباشرة(16)، إذا: $M_e = 3$

التفسير:

50 % من الاسر عدد أطفالها أقل من 3 و 50 % من الاسر عدد أطفالها أكبر من 3.

✓ **ايجاد قيمة الوسيط بيانيا:**

يتم إيجاد قيمة الوسيط بيانيا كما يلي:

✓ رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل

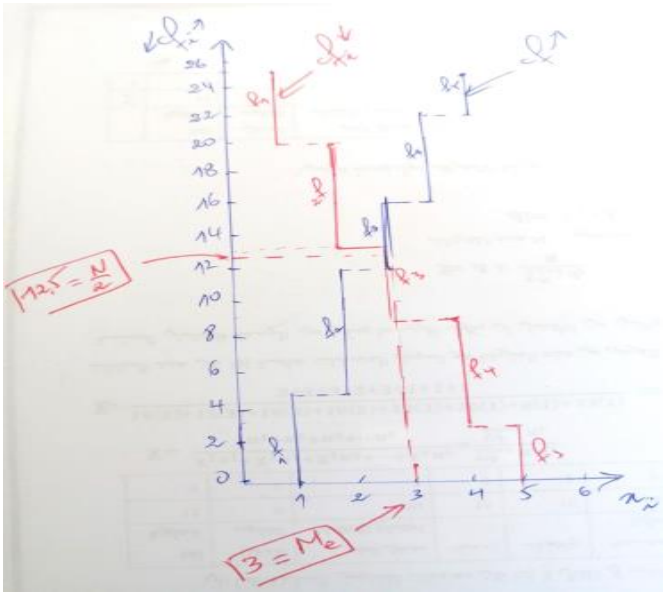
✓ تحديد رتبة الوسيط $\frac{N}{2}$ على المحور العمودي الذي يعبر عن التكرارات المتجمعة الصاعدة أو النازلة.

✓ اسقاط هذه النقطة على منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل افقيا،

✓ ونقطة التقاطع المتحصل عليها اسقاطها عموديا على المحور الافقي الذي يعبر عن المتغير x_i يعطينا قيمة الوسيط M_e.

التمثيل البياني:

x_i (عدد الأطفال)	f_i (عدد الاسر)	$cf_i\uparrow$	$cf_i\downarrow$
1	5	5	25
2	7	12	20
3	4	16	13
4	6	22	9
5	3	25	3
$\sum$	25	/	/



2- في حالة بيانات كمية مستمرة:

لحساب الوسيط من جدول تكراري لمتغير كمي مستمر نتبع الخطوات التالية:

- ✓ تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$.
- ✓ تحديد رتبة الوسيط بقسمة مجموع التكرارات على اثنين $(\frac{N}{2})$.
- ✓ البحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$ عن القيمة التي تساوي رتبة الوسيط $(\frac{N}{2})$ أو الاكبر منها مباشرة.
- ✓ تحديد فئة الوسيط أي الفئة التي يقع فيها الوسيط، و هي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الوسيط $(\frac{N}{2})$ أو الأكبر منها مباشرة.
- ✓ حساب قيمة الوسيط بالعلاقة التالية:

$$M_e = LC_{M_e} + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf_{(M_e-1)}\uparrow}{f_{M_e}}\right) L_{M_e}$$

حيث:

LC_{M_e} : الحد الأدني للفئة الوسيطية

$cf_{(M_e-1)}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة ما قبل الفئة الوسيطية

f_{M_e} : التكرار المطلق للفئة الوسيطية

L_{M_e}: طول الفئة الوسيطية

مثال3:

يمثل التوزيع التالي عدد الساعات الإضافية لمجموعة من العمال خلال شهر:

X_i (الساعات الاضافية)	f_i (عدد العمال)	$\mathbf{cf}_i\uparrow$
[2 4[	4	4
[4 6[	8	12
[6 8[	10	22
[8 10[	16	38
[10 12]	12	50
$\sum$	50	/

- ✓ **حساب قيمة الوسيط و تفسيره:**
- ✓ تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$.
- ✓ تحديد رتبة الوسيط: $\frac{N}{2} = \frac{50}{2}$=25
- ✓ نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$ عن القيمة 25. غير موجودة إذا نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة وهي 38.
- ✓ تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط، و هي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد (38). وهي: **[8 10]**

✓ حساب قيمة الوسيط بالعلاقة التالية: $M_e = LC_{M_e} + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf_{(M_e-1)}\uparrow}{f_{M_e}}\right) L_{M_e}$

LC_{M_e} : الحد الأدني للفئة الوسيطية ← 8

$cf_{(M_e-1)}\uparrow$: يمثل التكرار المتجمع الصاعد للفئة ما قبل الفئة الوسيطية ← 22

f_{M_e} : يمثل التكرار المطلق للفئة الوسيطية← 16

L_{M_e}: طول الفئة الوسيطية← 2

$$M_e = LC_{M_e} + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf_{(M_e-1)}\uparrow}{f_{M_e}}\right) L_{M_e} \Rightarrow Me = 8 + \left(\frac{25-22}{16}\right) 2 \Rightarrow Me = 8.38h$$

التفسير:

50 % من العمال عدد ساعاتهم الإضافية أقل من 8.38 ساعة و 50 % من العمال عدد ساعاتهم الإضافية أكبر من أو يساوي 8.38 ساعة.

✓ **إيجاد قيمة الوسيط بيانيا:**

يتم إيجاد قيمة الوسيط بيانيا كما يلي:

✓ رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل

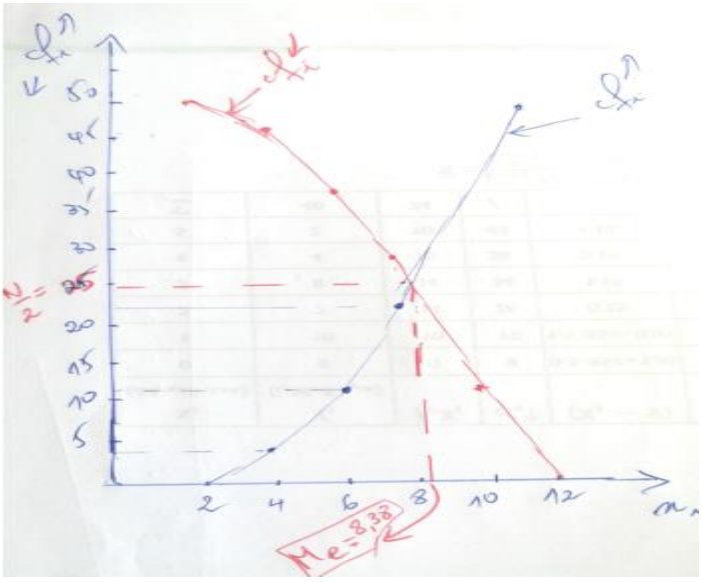
✓ تحديد رتبة الوسيط $\frac{N}{2}$ على المحور العمودي الذي يعبر عن التكرارات المتجمعة الصاعدة أو النازلة.

✓ اسقاط هذه النقطة على منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل افقيا،

✓ ونقطة التقاطع المتحصل عليها يتم اسقاطها عموديا على المحور الأفقي الذي يعبر عن المتغير x_i يعطينا قيمة الوسيط M_e.

التمثيل البياني:

X_i (الساعات الاضافية)	f_i (عدد الاسر)	$cf_i\uparrow$	$cf_i\downarrow$
[2 4[	4	4	50
[4 6[	8	12	46
[6 8[	10	22	38
[8 10[	16	38	28
[10 12]	12	50	12
$\sum$	50	/	/



III- شبهات الوسيط: الربيعيات، العشيريات، المئيات

شبهات الوسيط هي قيم تقسم مجموع بيانات أي ظاهرة إلى عدة أقسام متساوية ويتم التعامل مع هذه القيم بنفس طريقة التعامل مع الوسيط، وأشباه الوسيط هي: الربيعيات والعشيريات والمئييات.

1- الربيعيات(Quartiles):

هي القيم التي تقسم البيانات إلى أربع أجزاء متساوية، ويرمز له بالرمز: Qi، ويعرف الربيع(i) حيث: (i = 1,2,3) على أنه القيمة أو المفردة التي يسبقها (25 % × i)من البيانات المرتبة تصاعديا.

أ- الربيعيات في حالة بيانات غير مبوبة:

لمعرفة قيمة الربيعي لبيانات أولية (غير مبوبة) نقوم أولا بترتيبها تصاعديا أو تنازليا، ثم نحدد رتبة الربيعي (i) والتي تساوي$i(\frac{N+1}{4})$.

- ✓ إذا كان: $\frac{N+1}{4}$ دون فواصل نأخذ قيمة X المقابلة لهذه الرتبة
- ✓ إذا كان: $\frac{N+1}{4}$ مع فواصل نأخذ متوسط القيمتين

مثال1:

أوجد الربيعي الاول والثالث للسلسلة التالية: 12،09 ، 05 ،11، 03 ،06 ،10

الحل:

نرتب القيم تصاعديا:

Q_1= 5 Q_3= 5

القيمة	3	5	6	9	10	11	12
الرتبة	1	2	3	4	5	6	7

$1(\frac{N+1}{4})$ $3(\frac{N+1}{4})$

✓ **حساب الربيعي الأول:**

رتبة الربيعي الأول هي: $1(\frac{n+1}{4}) = \frac{7+1}{4} = 2$، إذا قيمة الربيعي الأول هي: $Q_1 = X_{\frac{n+1}{4}} = X_2 = 5$

التفسير:

25% من البيانات أقل من 5، و75 % من البيانات أكبر من 5.

✓ **حساب الربيعي الثالث:**

رتبة الربيعي الثالث هي: $3(\frac{n+1}{4}) = 3(\frac{7+1}{4}) = 6$ ، إذا قيمة الربيعي الثالث هي: $Q_3 = X_{3(\frac{n+1}{4})} = X_6 = 11$

التفسير:

75% من البيانات أقل من 11، و25 % من البيانات أكبر من 11.

ملاحظة:

قيمة الربيعي الثاني هي نفس قيمة الوسيط: $Q_2 = M_e$

ب- الربيعيات في حالة بيانات مبوبة كمية متقطعة:

لحساب الربيعيات من جدول تكراري لمتغير كمي متقطع نتبع الخطوات التالية:

- ✓ تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$.
- ✓ تحديد رتبة الربيعي(i) وهي: $\mathbf{i}(\frac{N}{4})$
- ✓ البحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$ عن القيمة التي تساوي رتبة الربيعي(i) أو الأكبر منها مباشرة.
- ✓ قيمة الربيعي هي قيمة x_i التي تقابل رتبة الربيعي أو الأكبر منها مباشرة.

مثال2:

يمثل الجدول التالي توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الاطفال:

(عدد الأطفال)	2	3	4	5	$\sum$
(عدد الأسر)	7	4	6	3	20

أوجد قيمة الربيعي الأول والثاني؟

الحل:

- ✓ **ايجاد قيمة الربيعي الأول:**
- ✓ تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$.
- ✓ تحديد رتبة الربيعي الأول: $i\frac{N}{4} = 1.\frac{25}{4}$=6.25
- ✓ نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$ عن القيمة 6.25 غير موجودة إذا نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة وهي 12.
- ✓ قيمة الربيعي الأول هي $\mathbf{x}_i$ التي تقابل القيمة 12، إذا: $\mathbf{Q_1 = 2}$

$\mathbf{x}_i$ (عدد الأطفال)	$\mathbf{f}_i$ (عدد الاسر)	$\mathbf{cf}_i\uparrow$
1	5	5
2	7	12
3	4	16
4	6	22
5	3	25
$\sum$	25	/

Q_1= 2

Q_3= 4

التفسير:

25% من الأسر عدد أطفالها أقل من 2 و 75% من الأسر عدد أطفالها أكبر من 2.

- ✓ **ايجاد قيمة الربيعي الثالث:**
- ✓ تحديد رتبة الربيعي الثالث: $i\frac{N}{4} = 3.\frac{25}{4}$=18.75
- ✓ نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$ عن القيمة 18.75، غير موجودة إذا نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة وهي 22.
- ✓ قيمة الربيعي الثالث هي $\mathbf{x}_i$ التي تقابل القيمة 22، إذا: $\mathbf{Q_3 = 4}$

التفسير:

75% من الأسر عدد أطفالها أقل من 4 و 25% من الأسر عدد أطفالها أكبر من 4.

ج- الربيعيات في حالة بيانات مبوبة كمية مستمرة:

لحساب الربيعيات من جدول تكراري لمتغير كمي مستمر نتبع الخطوات التالية:

- ✓ تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$.
- ✓ تحديد رتبة الربيعي(i) وهي: $\mathbf{i}(\frac{N}{4})$
- ✓ البحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$ عن القيمة التي تساوي رتبة الربيعي(i) أو الأكبر منها مباشرة.
- ✓ تحديد الفئة التي يقع فيها الربيعي(i)، و هي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيعي(i) أو الأكبر منها مباشرة.
- ✓ حساب قيمة الربيعي(i) بالعلاقة التالية:

$$Q_i = \mathbf{LC}_{Q_i} + \left(\frac{i(\frac{N}{4}) - cf_{(Q_i-1)}\uparrow}{f_{Q_i}}\right)\mathbf{L}_{Q_i}$$

حيث:

$\mathbf{LC}_{Q_i}$: الحد الأدني للفئة الوسيطية

$cf_{(Q_i-1)}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة ما قبل الفئة الوسيطية

f_{Q_i} : التكرار المطلق للفئة الوسيطية

$\mathbf{L}_{Q_i}$: طول الفئة الوسيطية

مثال3:

يمثل التوزيع التالي عدد الساعات الإضافية لمجموعة من العمال خلال شهر:

X_i (الساعات الاضافية)	f_i (عدد العمال)	$\mathbf{cf}_i\uparrow$
[2 4[	4	4
[4 6[	8	12
[6 8[	10	22
[8 10[	16	38
[10 12]	12	50
$\sum$	50	

الفئة الربيعية1

الفئة الربيعية3

أحسب قيمة الربيعي الأول والثاني؟

الحل:

✓ **حساب قيمة الربيعي الأول و تفسيره:**

- تشكيل عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$.
- تحديد رتبة الربيعي الأول: $i\frac{N}{4} = 1.\frac{50}{4}$=12.5
- نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(\mathbf{cf}_i\uparrow)$ عن هذه القيمة 12. 5، غير موجودة إذا نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة وهي 22.

- تحديد الفئة التي يقع فيها الربيعي الأول، و هي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد (22). وهي:]8 6[

- حساب قيمة الربيعي الأول بالعلاقة التالية: $$Q_1 = LC_{Q_1} + \left(\frac{1(\frac{N}{4}) - cf_{(Q_1-1)}\uparrow}{f_{Q_1}}\right) L_{Q_1}$$

حيث:

LC_{Q_1} : الحد الأدني للفئة الربيعية الأولى ← 6

$cf_{(Q_1-1)}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة ما قبل الفئة الربيعية الأولى ← 12

f_{Q_1} : التكرار المطلق للفئة الربيعية الأولى ← 10

L_{Q_1}: طول الفئة الربيعية الأولى ← 2

$$Q_1 = LC_{Q_1} + \left(\frac{1(\frac{N}{4}) - cf_{(Q_1-1)}\uparrow}{f_{Q_1}}\right) L_{Q_1} \Rightarrow \ Q_1 = 6 + \left(\frac{12.5-12}{10}\right) 2 \Rightarrow \ Q_1 = 6.1h$$

التفسير:

25 % من العمال عدد ساعاتهم الإضافية أقل من 6.1 ساعة و 75 % من العمال عدد ساعاتهم الإضافية أكبر من أو يساوي 6.1 ساعة.

✓ **حساب قيمة الربيعي الثالث و تفسيره:**

- تحديد رتبة الربيعي الثالث: $i\frac{N}{4} = 3.\frac{50}{4}$ =37.5

- نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد$(cf_i\uparrow)$ عن هذه القيمة **37.5**، غير موجودة إذا نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة وهي **38**.

- تحديد الفئة التي يقع فيها الربيعي الثالث، و هي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد (38). وهي:]10 8[

- حساب قيمة الربيعي الثالث بالعلاقة التالية: $$Q_3 = LC_{Q_3} + \left(\frac{3(\frac{N}{4}) - cf_{(Q_3-1)}\uparrow}{f_{Q_3}}\right) L_{Q_1}$$

حيث:

LC_{Q_3} : الحد الأدني للفئة الربيعية الثالثة ← 8

$cf_{(Q_3-1)}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة ما قبل الفئة الربيعية الثالثة ← 22

f_{Q_3} : التكرار المطلق للفئة الربيعية الثالثة ← 16

L_{Q_1}: طول الفئة الربيعية الثالثة ← 2

$$Q_3 = LC_{Q_3} + \left(\frac{3(\frac{N}{4}) - cf_{(Q_3-1)}\uparrow}{f_{Q_3}}\right) L_{Q_3} \Rightarrow \ Q_3 = 8 + \left(\frac{37.5-22}{16}\right) 2 \Rightarrow \ Q_3 = 9.93h$$

التفسير:

75 % من العمال عدد ساعاتهم الإضافية أقل من 9.93 ساعة و 25 % من العمال عدد ساعاتهم الإضافية أكبر من أو يساوي 9.93 ساعة.

2- العشيريات(Deciles):

هي القيم التي تقسم البيانات إلى عشرة أجزاء متساوية، ويرمز لها بالرمز :Di، ويعرف العشيري(i)حيث:(i = 1,2,3.....,9) على أنه القيمة أو المفردة التي يسبقها (i × 10 %)من البيانات المرتبة تصاعديا.

3- الميئيات(Percentiles):

هي القيم التي تقسم البيانات إلى مئة جزء متساوي، ويرمز لها بالرمز :Pi، ويعرف الميئ(i) حيث: (i = 1,2,3 , ... ,99) على أنه القيمة أو المفردة التي يسبقها (i × 10 %)من البيانات المرتبة تصاعديا.