المحور السادس: مقاييس الشكل

The xixth axis: Measures of Shape

محتوى المحاضرة التاسعة

أولا: مقاييس الإلتواء(Skewness Measures)

I- دراسة الالتواء باستخدام العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية

II- دراسة الالتواء باستخدام مقاييس الشكل البسيطة(Simple Skewness Measures):

1- معامل بيرسون البسيط للإلتواء(The Pearson's coefficient of skewness)

2- معامل باولي(The Bowley's coefficient of skewness)

III- دراسة الالتواء باستخدام مقاييس الشكل بالعزوم(Moments Skewness Measures):

1- مفهوم العزوم(moments)

2- معامل بيرسون للإلتواء بالعزوم (The Pearson's moment coefficient of skewness)

3- معامل فيشر للإلتواء بالعزوم (The Fisher's moment coefficient of skewness)

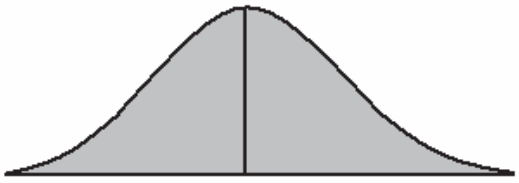
ثانيا: مقاييس التفلطح(Kurtosis Measures):

1- معامل بيرسون للتفلطح(Pearson's Kurtosis coefficient)

2- معامل فيشر للتفلطح(Fisher's Kurtosis coefficient)

تمهيد:

عند تمثيل بيانات ظاهرة ما في شكل منحنى تكراري، فإن المنحني يأخذ اشكالا مختلفة، فقد يكون متماثل بمعنى أن له قمة في المنتصف، ولو اسقطنا عمودا من قمته على المحور الافقي لشطره نصفين متماثلين، مثل منحنى التوزيع الطبيعي، كما هو مبين في الشكل التالي:



منحنى التوزيع الطبيعي (منحنى متماثل)

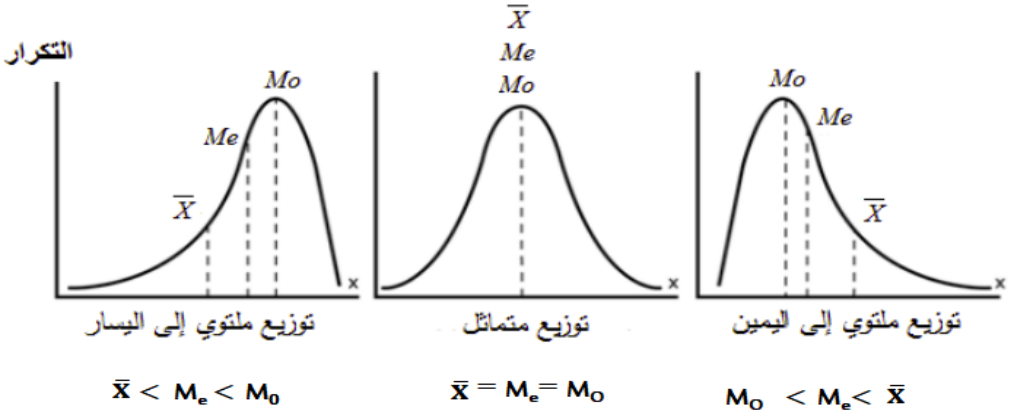
ولكن في كثير من الحالات يكون المنحني التكراري غير متماثل أي ملتوي نحو اليمين أو نحو اليسار حسب موقع مقاييس النزعة المركزية(الوسط والوسيط والمنوال)، كما قد يكون الشكل البياني منبسط أو مدبب. ولمعرفة ذلك حسابيا يمكن الاعتماد على **مقاييس الالتواء والتفلطح**.

أولا- مقاييس الإلتواء: ويقصد بها بعد المنحنى التكراري عن التماثل(أي بعدالبيانات عن وسطها الحسابي)

I- دراسة الالتواء باستخدام العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية:

يمكن من خلال المقارنة بين مقاييس النزعة المركزية تحديد شكل المنحنى التكراري، وذلك حسب الحالات التالية:

- إذا كان ($\bar{X} = M_e = M_O$): فإن منحنى التوزيع التكراري **متماثل(Symmetrical).**
- إذا كان ($\bar{X} < M_e < M_O$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليسار(Distributions Skewed to the Left).**
- إذا كان ($M_O < M_e < \bar{X}$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين(Distributions Skewed to the Right).**



$\bar{X} < M_e < M_O$ $\bar{X} = M_e = M_O$ $M_O < M_e < \bar{X}$

II- دراسة الالتواء باستخدام مقاييس الشكل البسيطة(Simple Skewness Measures):

I- معامل بيرسون البسيط للإلتواء (Pearson's coefficient of skewness):

يعتمد هذا المعامل على العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$S_P = \frac{\bar{x} - M_O}{s_x} = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{s_x}$$

- إذا كان ($S_P = 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **متماثل(Symmetrical).**
- إذا كان ($S_P < 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليسار(Distributions Skewed to the Left).**
- إذا كان ($S_P > 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين(Distributions Skewed to the Right).**

مثال1:

إذا علمت أن: $\bar{x} = 34.9$، $M_O = 27.05$، $s_x = 14.81$ ، حدد شكل منحنى التوزيع؟

الحل:

$$S_P = \frac{\bar{x} - M_O}{s_x} = \frac{34.9 - 27.05)}{14.81} = 0.53 > 0$$

بما أن: $S_P = 0.53 > 0$: فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين**

II- معامل باولي للإلتواء (Bowley's coefficient of skewness):

يستعمل هذا المعامل الربيعي الاول والثالث والرسيط، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$S_B = \frac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{(Q_3 - M_e) + (M_e - Q_1)}$$

$$S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

- إذا كان ($S_B = 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **متماثل(Symmetrical)**.
- إذا كان ($S_B < 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليسار(Distributions Skewed to the Left)**.
- إذا كان ($S_B > 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين(Distributions Skewed to the Right)**.

III- دراسة الالتواء باستخدام مقاييس الشكل بالعزوم(Moments Skewness Measures):

1- مفهوم العزوم(Moments):

هي مقاييس شبيهة من حيث طريقة حسابها بالتباين، يمكن أن يحسب العزم حول نقطة الصفر فيطلق عليه العزم البسيط، و قد يحسب حول أي قيمة أخرى كالوسط الحسابي مثلا فيطلق عليه العزم المركزي، أما رتبة العزم فتتحدد بالقوة التي ترفع إليها انحرافات القيم عن نقطة الإرتكاز المختارة (الصفر أو الوسط الحسابي أو غيرها.

1-1- العزوم البسيطة(Simple Moments):

العزم البسيط من المرتبة r هو عبارة عن الوسط الحسابي لقيم المتغير الإحصائي X_i مرفوعة إلى القوة r ، ويرمز له بالرمز $\bar{X}^r$ ، ويحسب كما يلي:

أ- **في حالة بيانات غير مبوبة:** $\bar{X}^r = \frac{\Sigma X_i{}^r}{n}$

ب- **في حالة بيانات مبوبة:**

- **بيانات متقطعة:** $\bar{X}^r = \frac{\Sigma f_i X_i{}^r}{N}$
- **بيانات مستمرة:** $\bar{X}^r = \frac{\Sigma f_i m_i{}^r}{N}$

ملاحظة: العزم البسيط من المرتبة 1 هو الوسط الحسابي $\bar{x}$ ($\bar{X}^1 = \bar{x}$)

1-2- العزوم المركزية(Moments about the mean):

العزم المركزي من المرتبة r هو عبارة عن الفرق بين قيم المتغير الإحصائي X_i ووسطها الحسابي مرفوعة إلى القوة r ، ويرمز له بالرمز M_r ، ويحسب كما يلي:

أ- **في حالة بيانات غير مبوبة:** $M_r = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^r}{n}$

ب- **في حالة بيانات مبوبة:**

- **بيانات متقطعة:** $M_r = \frac{\Sigma f_i (X_i - \bar{X})^r}{N}$
- **بيانات مستمرة:** $M_r = \frac{\Sigma f_i (m_i - \bar{X})^r}{N}$

من أهم خواص العزوم المركزية ما يلي:

- العزم المركزي من المرتبة 0 يساوي دائما 1، أي: $M_0 = 1$
- العزم المركزي من المرتبة 1 يساوي 0، أي: $M_1 = 0$
- العزم المركزي من المرتبة 2 يساوي التباين، أي: $M_2 = v_x$

2- **معامل بيرسون للإلتواء بالعزوم:(The Pearson's moment coefficient of skewness):**

يعتمد هذا المعامل في حسابه على العزم المركزي الثاني والثالث، ويرمز له بالرمز SM_P، ويحسب كما يلي:

$$SM_P = \frac{{M_3}^2}{{M_2}^3}$$

- إذا كان ($SM = 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **متماثل**(Symmetrical).
- إذا كان ($SM_P < 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليسار**(Distributions Skewed to the Left).
- إذا كان ($SM_P > 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين**(Distributions Skewed to the Right).

3- **معامل فيشر للإلتواء بالعزوم (The Fisher's moment coefficient of skewness):**

وهو من أدق المقاييس الشكلية وأكثرها استعمالا، ويرمز له بالرمز SM، ويحسب كما يلي:

$$SM_F = \frac{M_3}{{S_x}^3}$$

- إذا كان ($SM = 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **متماثل**(Symmetrical).
- إذا كان ($SM_F < 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليسار**(Distributions Skewed to the Left).
- إذا كان ($SM_F > 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين**(Distributions Skewed to the Right).

ثانيا: مقاييس التفلطح(Kurtosis Measures):

وتستخدم لقياس درجة علو أو انخفاض منحنى التوزيع التكراري بالنسبة للتوزيع المتماثل(الطبيعي). فعندما يكون شكل التوزيع ذو قمة مرتفعة وضيقة يطلق عليه **منحنى مدبب**، أما إذا كانت قمته مسطحة فيطلق عليه **منحنى مفلطح**، في حين عندما يكون التوزيع بين الحالتين نطلق عليه معتدل التفلطح. ويحسب التفلطح باستخدام معامل برسن للتفلطح بالعزوم ومعامل فيشر للتفلطح بالعزوم.

1- **معامل بيرسون للتفلطح بالعزوم (The Pearson's Kurtosis coefficient):** يرمز له بالرمز K_P، ويحسب كما يلي:

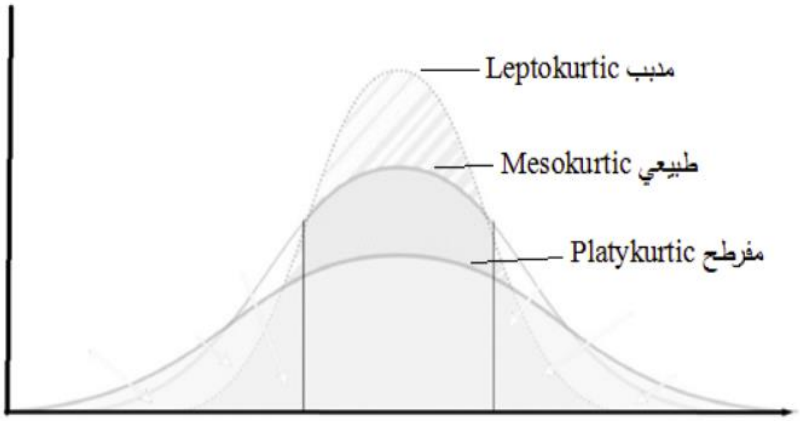
$$K_P = \frac{M_4}{{M_2}^2} = \frac{M_4}{{S_x}^4}$$

- إذا كان ($K_P = 3$): فإن منحنى التوزيع التكراري **معتدل**(Mesokurtic).
- إذا كان ($K_P < 3$): فإن منحنى التوزيع التكراري **مفلطح**(platykurtic).
- إذا كان ($K_P > 3$): فإن منحنى التوزيع التكراري **مدبب**(leptokurtic).

2- **معامل فيشر للتفلطح بالعزوم (The Fisher's Kurtosis coefficient):** يرمز له بالرمز K_F، ويحسب كما يلي:

$$K_F = K_P - 3$$

- إذا كان ($K_F = 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **معتدل**(Mesokurtic).
- إذا كان ($K_F < 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **مفلطح**(platykurtic).
- إذا كان ($K_F > 0$): فإن منحنى التوزيع التكراري **مدبب**(leptokurtic).



مثال2:

1- أحسب العزم الاول والثاني للبيانات التالية:

X_i (رقم الأعمال 10^6 دج)	[10 12[	[12 14[	[14 16[	[16 18[	[18 20]
f_i (عدد المؤسسات)	3	2	4	6	5

2- أحسب التباين والانحراف المعياري؟

3- أحسب العزم المركزي الاول والثاني والثالث والربع؟

4- أدرس شكل منحنى التوزيع باستخدام معامل بيرسون للإلتواء بالعزوم ومعامل فيشر للإلتواء بالعزوم ومعامل بيرسون للتفلطح ومعامل فيشر للتفلطح؟

الحل:

X_i (رقم الأعمال 10^6 دج)	f_i (عدد المؤسسات)	m_i	$f_i m_i$	$f_i {m_i}^2$	$(m_i - \bar{x})$	$f_i(m_i - \bar{x})^2$	$f_i(m_i - \bar{x})^3$	$f_i(m_i - \bar{x})^4$
[10 12[	10	11	110	1210	- 4.09	167.281	- 684.17	2798.29
[12 14[	25	13	325	4225	- 2.09	109.2025	- 228.23	477.00
[14 16[	40	15	600	9000	- 0.09	0.324	- 0.02	0.002
[16 18[	20	17	340	5780	1.91	72.962	139.35	266.17
[18 20]	15	19	285	5415	3.91	229.3215	896.64	3505.89
$\sum$	110	/	1660	**25630**	/	579.091	123.57	7047.35

- **حساب العزم الاول والثاني:**
- **العزم الأول هو الوسط الحسابي:**

$$\bar{x}^1 = \frac{\sum f_i {m_i}^1}{N} = \bar{x} = \frac{1660}{110} = 15.09$$

- **العزم الثاني:**

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum f_i m_i^2}{N} = \frac{25630}{110} = 233$$

- حساب التباين والانحراف المعياري:
- **التباين:**

$$V_x = \frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{N} \quad \text{أو} \quad V_x = \frac{\sum f_i (m_i)^2}{N} - \bar{x}^2 \quad (\text{العزم الثاني – مربع العزم الأول})$$

$$V_x = \frac{\sum f_i (m_i)^2}{N} - \bar{x}^2 = 233 - (15.09)^2 = 5.29$$

- **الانحراف المعياري:** $S_X = \sqrt{V_x} = \sqrt{5.29} = 2.3$
- **حساب العزم المركزي الأول والثاني والثالث والربع:**
- **العزم المركزي الأول:** $M_1 = 0$
- **العزم المركزي الثاني:** $M_2 = v_x = 5.29$
- **العزم المركزي الثالث:** $M_3 = \frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^3}{N} = \frac{123.57}{110} = 1.12$
- **العزم المركزي الرابع:** $M_4 = \frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^4}{N} = \frac{7047.35}{110} = 64.06$
- **دراسة شكل منحنى التوزيع باستخدام:**
- **معامل بيرسون للإلتواء بالعزوم:** $SM_P = \frac{{M_3}^2}{{M_2}^3}$

$SM_P = \frac{{M_3}^2}{{M_2}^3} = \frac{(1.12)^2}{(5.29)^3} = \frac{1.25}{28.03} = 0.04 > 0 \Rightarrow$ منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين**

- **معامل فيشر للإلتواء بالعزوم:** $SM_F = \frac{M_3}{{S_x}^3}$

$SM_F = \frac{M_3}{{S_x}^3} = \frac{1.12}{(2.3)^3} = \frac{1.12}{12.16} = 0.09 > 0 \Rightarrow$ منحنى التوزيع التكراري **ملتوي نحو اليمين**

- **معامل بيرسون للتفلطح:** $K_P = \frac{M_4}{{M_2}^2}$

$K_P = \frac{M_4}{{M_2}^2} = \frac{64.06}{(5.29)^2} = \frac{64.06}{27.98} = 2.28 < 3 \Rightarrow$ منحنى التوزيع التكراري **مفلطح**

- **معامل فيشر للتفلطح:** $K_F = K_P - 3$

$K_F = K_P - 3 = 2.28 - 3 = -0.72 < 0 \Rightarrow$ منحنى التوزيع التكراري **مفلطح**