السلسلة5: دالة الإنتاج في الفترة القصيرة

تمرين رقم 01:

يبين الجدول التالي تطور الكمية المنتجة من السلعة xحسب عدد العمال:

x	0	100	240	390	520	610	660	660	640
L	0	1	2	3	4	5	6	7	8

1- احسب الإنتاجية المتوسطة (PM_L) و الإنتاجية الحدية (Pmg_L).

2- ماذا تعني إنتاجية حدية موجبة، إنتاجية حدية سالبة، و إنتاجية حدية معدومة.

3- حدد المنطقة المثلى للإنتاج و ما هي خصائص المناطق الأخرى؟

الحل:

x	0	100	240	390	520	610	660	660	640
L	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$PM_L = \frac{x}{L}$	-	100	120	130	130	122	110	94,3	80
$Pmg_L = \frac{\Delta x}{\Delta L}$	-	100	140	150	130	90	50	0	- 20

2- إنتاجية حدية موجبة: زيادة عامل تؤدي إلى رفع مستوى الإنتاج الكلي.

إنتاجية حدية سالبة: زيادة عامل تؤدي إلى تخفيض مستوى الإنتاج الكلي.

إنتاجية حدية معدومة: بقاء مستوى الإنتاج ثابت مع زيادة عامل.

3- المنطقة II: $Max\, PM_L \longrightarrow Pmg_L = 0$

$4 \longrightarrow 7$

خصائص المناطق الأخرى:

I : $Pmg_L < 0$ $\quad Pmg_L > PM_L$

II : $Pmg_L > 0$ $\quad Pmg_L < 0$

تمرين رقم 02:

قدرت دالة الإنتاجية المتوسطة لمؤسسة ما على الشكل التالي:

$$\frac{X}{L} = 30 + 12L - L^2$$

1- حدد عدد العمال الذي يعظم مستوى الإنتاج؟

2- اوجد حدود مناطق الإنتاج.

الحل:

$x = PM_L \cdot L = (30 + 12L - L^2).\ L = 30L + 12L^2 - L^3$

Max x ➔ $\frac{\delta X}{\delta L} = 0$ ➔ $30 + 24L - 3L^2 = 0$

➔ $10 + 8L - L^2 = 0$

$L_1 = 9$; $L_2 < 0$ (مرفوض)

إذا عدد العمال الذي يعظم مستوى الإنتاج هو 9.

I : 0 ⟶ Max PM_L

II : Max PM_L ⟶ $Pmg_L = 0$

III: $Pmg_L = 0$ ⟶ ∞

$PM_L = 30 + 12L - L^2$ ➔ Max PM_L ➔ $(PM_L)' = 0$

$12 - 12L = 0$ ➔ $L = 6$.

I: 0 ⟶ 6

II: 6 ⟶ 9

III: 9 ⟶ ∞

تمرين رقم 03:

لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$x = f(K,L) = 3K^2 L^2 - 0{,}5\, KL^3$$

1- إذا كان $K = 1$ (المدى القصير) ما هو عدد العمال الذي يضمن أقصى إنتاج كلي؟

2- انطلاقا من أي قيمة يزداد الإنتاج بمعدل متناقص.

3- حدد مناطق الإنتاج الثلاثة.

الحل:

1- $x = 3L^2 - 0{,}5\, L^3$

Max x ➔ $Pmg_L = 0$ ➔ $6L - 1{,}5L^2 = 0$

$L(6-1{,}5L) = 0$, $L_1 = 0$ (مرفوض) ; $L_2 = \frac{6}{1{,}5} = 4$

عدد العمال الذي يضمن أقصى إنتاج كلي هو 4.

2- انطلاقا من Max Pmg_L

Max Pmg_L ➔ $(Pmg_L)' = 0$ ➔ $6 - 3L = 0$ ➔ $L = 3$

انطلاقا من العامل رقم 3 يزداد الإنتاج بمعدل متناقص.

3- Max PM_L ➔ $(PM_L)' = 0$

$PM_L = \frac{X}{L}\, 3L - 0{,}5\, L^2$ ➔ $(PM_L)' = 0$ ➔ $3 - L = 0$ ➔ $L = 3$

I: $0 \longrightarrow 3$

II: $3 \longrightarrow 4$

III: $4 \longrightarrow \infty$

تمرين رقم 04:

بافتراض لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$x = AK^{\alpha} L^{1-\alpha} \quad ; \quad (0 < \alpha < 1)$$

اثبت أن الإنتاجيات المتوسطة و الحدية تكون دوال للنسبة $(\frac{K}{L})$، و تكون مستقلة عن القيم المطلقة لـ K و L.

الحل:

$$PM_L = \frac{x}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \frac{AK^{\alpha}}{L^{\alpha}} = A(\frac{K}{L})^{\alpha}$$

$$Pmg_L = \frac{\delta x}{\delta L} = A(1-\alpha)K^{\alpha} L^{-\alpha} = A(1-\alpha)\ (\frac{K}{L})^{\alpha}$$

$$PM_K = \frac{x}{K} = \frac{AK^{\alpha}.L^{1-\alpha}}{K} = AK^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = A(\frac{K}{L})^{\alpha-1}$$

$$Pmg_K = \frac{\delta x}{\delta K} = \alpha A.K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha A \frac{K^{\alpha-1}}{L^{\alpha-1}} = \alpha A\ (\frac{K}{L})^{\alpha-1}$$