المحاضرة الثالثة: نظرية المنفعة المرتبة (المنفعة الترتيبية/منحنيات السواء)

1- مفهوم المنفعة المرتبة وفرضياتها:

استعرضنا في المحاضرة السابقة التحليل الكلاسيكي للمنفعة الحدية وأوضحنا انه تم توجيه انتقاد لها من حيث قيامها على أساس التحليل الكمي Cardinal analysis وهذا ما دفع بعض الاقتصاديين مثل Hicks و Pareto إلى التوصل إلى تحليل قائم على أساس التحليل الترتيبي الذي عرف بتحليل منحنيات السواء.

ففي هذه النظرية يكون المستهلك قادرا على ترتيب سلعه حسب رغبته و بالتالي لابد له من دالة منفعة تربط بين كمية كل سلعة والرتبة المعطاة لهذه الكمية في سلم تفضيلاته، فهو يحدد الثنائية التي تعطيه اكبر منفعة دون اللجوء إلى القياس الكمي.

فعوض أن نقول أن الكمية x_1 من السلعة X_1 تعطي منفعة ضعف ما تعطيه الكمية x_2 من السلعة X_2 نقول أن الكمية x_1 للسلعة X_1 مفضلة عن الكمية x_2 للسلعة X_2

مفهوم المنفعة المرتبة يكون مؤسسا على تفضيلات المستهلك، هذه الأخيرة التي تتحكم فيها عدة عوامل كإختياراته الشخصية للسلع، ذوقه، عاداته وتقاليده.... إلخ.

تقوم هذه النظرية على مجموعة من الافتراضات اهمها:

- **السلوك الرشيد:** يتصرف المستهلك بطريقة رشيدة، ويسعى الى تعظيم منفعته
- **الاستمرارية:** اذا كان المستهلك يفضل سلع المجموعة **أ** على سلع المجموعة **ب، و** يفضل سلع المجموعة **ب** على المجموعة **ج،** فان المستهلك سيفضل سلع المجموعة **أ** على المجموعة **ج.**
- **التجانس:** اذا كان المستهلك يفضل سلع المجموعة **أ** على سلع المجموعة **ب** بنفس القدر الذي يفضله فيه سلع المجموعة **ب** على المجموعة **ج،** فان المستهلك سيفضل سلع المجموعة **أ** على المجموعة **ج** بنفس القدر.
- تعتبر فرضيات المنفعة المرتبة اداة مفيدة لتحليل سلوك المستهلك ولكنها اقل دقة من فرضيات المنفعة الكمية.

2- مفهوم منحنيات السواء Indifference Curvest Analysis

منحنى السواء هو التمثيل البياني للتركيبات او الثنائيات المختلفة من سلعتين X وy التي تعطي للمستهلك إشباعا متساويا، أي نفس المستوى من المنفعة، إذ أن كل مجموعة تعطي نفس الإشباع الذي تعطيه المجموعة الأخرى.

فإذا كان إشباع المستهلك ممثل بدالة المنفعة الكلية Ut(x,y) وكان له مستوى إشباع Ut_o تكون معادلة منحنى السواء الممثلة لهذا المستوى من الإشباع من الشكل التالي:

$$Ut(x,y) = Ut_0 => y = f(x)$$

مثال 1 :

مستهلك دالة منفعته تأخذ الشكل التالي:

$$Ut(x,y) = xy$$

إذا كان مستوى الإشباع التوازني لهذا المستهلك Ut=100 أوجد:

-معادلة منحنى السواء

-جدول السواء

-التمثيل البياني

الحل:

معادلة منحنى السواء

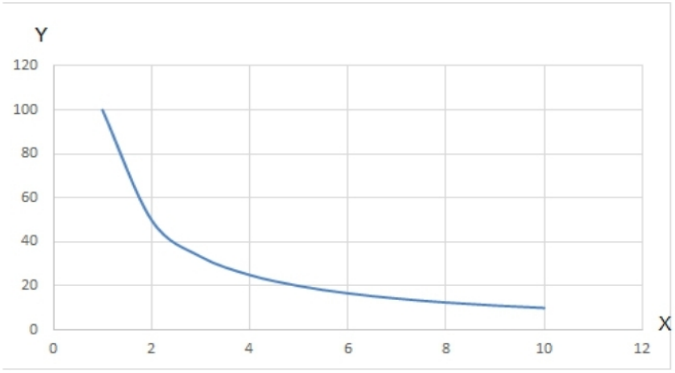
$$Ut(x,y) = xy$$
$$Ut_0 = 100$$

$$Ut(x,y) = Ut_0 => xy = 100 => y = \frac{100}{x}$$

جدول السواء

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	100	50	33.33	25	20	16.67	14.28	12.5	11.11	10

منحنى السواء



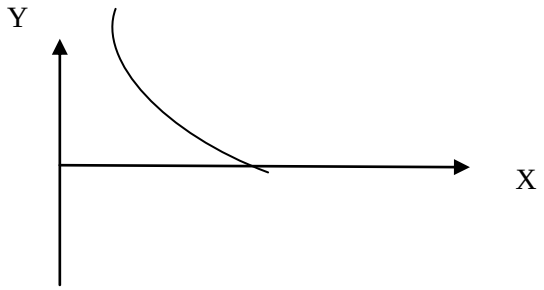
حيث °U: ترمز إلى مستوى ثابت و محدد من المنفعة.

3- خصائص منحنيات السواء:

تتميز هذه المنحنيات بما يلي:

3-1- منحنيات السواء لها انحدار سالب

ينحدر منحنى السواء من الأعلى إلى الأسفل ومن اليسار إلى اليمين، وهذه الخاصية ضرورية للمحافظة على نفس الإشباع. فعند إضافة وحدات من السلعة الأولى يتم التخلي عن وحدات من السلعة الثانية لتحقيق نفس الإشباع.



يقاس انحدار منحنى السواء بالمعدل الحدي للإحلال Taux Marginal de Substitution السلعة x محل السلعة y ، ويختصر بـ TMSx ,y ويعرف بأنه عدد الوحدات التي يتم التخلي عنها من السلعة y مقابل وحدة إضافية من السلعة X لكي يحافظ المستهلك على نفس مستوى الإشباع، أي البقاء على نفس منحنى السواء .

ويعبر عنه رياضيا بالصيغة التالية:

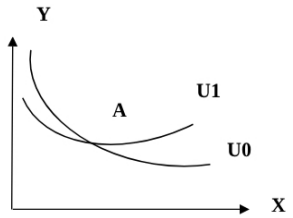
$$TMS_{x,y} = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$$

يكون المعدل الحدي للإحلال سالب فيؤخذ بالقيمة المطلقة حتى يتم التعبير عنه بقيمة موجبة.

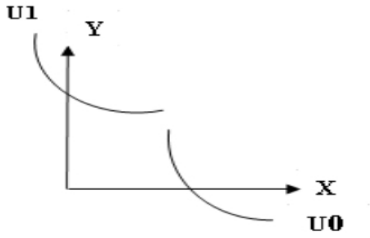
3-2- منحنيات السواء لا تتقاطع فيما بينها ولا مع المحورين

لا يوجد لكل مستهلك منحنى سواء واحد، بل يوجد لكل مستهلك مجموعة من منحنيات السواء التي تمثل درجات مختلفة من الاشباع تعرف في مجموعها بخريطة السواء، وكلما انتقل المستهلك إلى منحنى سواء أعلى كلما زادت درجة الإشباع المحقق.

ولا يمكن لمنحنيات السواء المذكورة أن تتقاطع، إذ أن كل منحنى يمثل مستوى معين من الإشباع، ولو افترضنا تقاطع منحنيين من منحنيات السواء لمستهلك لكان معنى ذلك أن هناك تركيبة معينة (نقطة تقاطعهما) تعطي درجتين مختلفتين من الإشباع، وهذا غير منطقي.

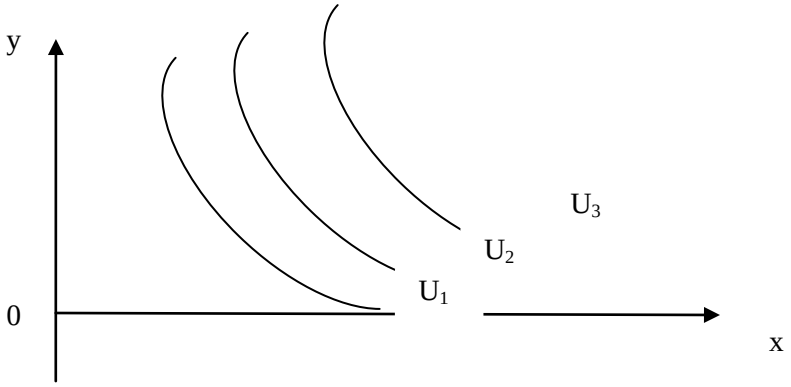


كما أن منحنيات السواء لا تتقاطع مع محور الفواصل أو التراتيب وذلك لأن نقطة التقاطع تعني بأن المستهلك يستهلك سلعة واحدة فقط.



3-3- منحنيات السواء محدبة نحو نقطة الأصل:

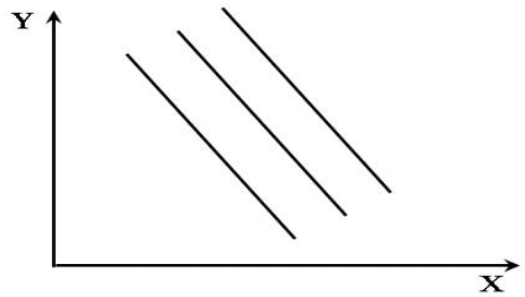
أي ان الميل السالب للمنحنى يصبح ضعيفا كلما ابتعدنا عن المحور العمودي و اتجهنا إلى المحور الأفقي.



3-4- علاقة طردية بين منحنيات السواء والكميات المستهلكة: يزداد مستوى المنفعة بالابتعاد عن نقطة الأصل والعكس صحيح.

3-5- حالات خاصة لمنحنى السواء: هناك حالتين خاصيتين هما:

الحالة الأولى: في هذه الحالة تكون السلعتانx و y بديلتان، إذ يشترط على المستهلك للحصول على كمية إضافية من السلعة X أن يتخلى على نفس الكمية من y، وبالتالي فقيمة TMSxy ثابتة عند جميع نقاط منحنى السواء ، وتأخذ منحنيات السواء الشكل الآتي:



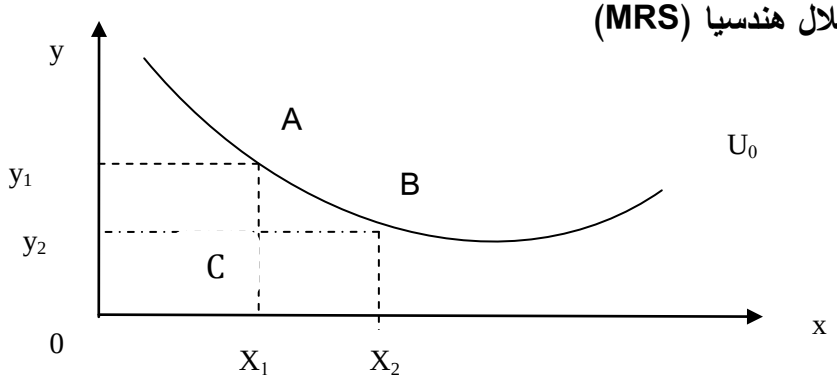
الحالـة الثانيـة فـي هذه الحالـة تكون السلعتانx و y مكملتان (لا توجد علاقة تبادل بينهما) 0=TMSxy ، وبالتالي فزيادة السلعة الأولى لا يؤدي إلى انخفاض السلعة الثانية.

4- المعدل الحدي للإحلال TMS : Taux marginal de substitution

يعرف المعدل الحدي لإحلال سلعة ما بالنسبة لسلعة أخري بأنه عبارة عن عدد الوحدات من السلعة الثانية التي يتوجب التنازل عنها مقابل الحصول على وحدة واحدة من السلعة الأولى لكي محافظ المستهلك على نفس مستوى الإشباع أي البقاء على نفس منحنى السواء. وبالتالي العلاقة عكسية بين كمية السلعة x وكمية السلعة y، ويمكن حسابه هندسيا وحسابيا

4-1- تحديد المعدل الحدي للإحلال هندسيا (MRS)

ليكن لدينا البيان التالي:



يشمل المنحنى (U_0) مختلف الثنائيات (X_i, Y_i) التي توفر نفس مستوى المنفعة للمستهلك.

$$(X_1, Y_1) \sim (X_2, Y_2)$$

$$\alpha \text{ ميل} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{oy2 - oy1}{ox2 - ox1} = \frac{AC}{CB}$$

$$\mathbf{TMS}_{(B,A)} = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$$

من البيان السابق نلاحظ انه على طول المنحنى (U_0) مستوى المنفعة يكون ثابتا، فإنتقال المستهلك من النقطة A إلى النقطة B، ، لا يؤثر على مستوى إشباعه، فهو بذلك يتخلى عن نسبة من $(\Delta y)y$ و يعوضها بنسبة من $(\Delta x)x$و يبقى محافظا على إشباعه ثابتا.

إذا يمثل**TMS** الكمية الإضافية من وحدات (Y) المتخلى عنها مقابل الحصول على وحدة إضافية من (X) مع المحافظة على مستوى الإشباع نفسه.

مثال: يمكننا إيجاد المعدل الحدي للإحلال بين نقطتين حسب معطيات الجدول التالي: (الحالة المتقطعة)

x	4	5
y	5	20

$$TMS_{x,y} = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{20 - 5}{5 - 4}\right| = 5$$

لزيادة استهلاك وحدة واحدة من السلعة x (الانتقال من الوحدة 4 إلى 5) يتم التخلي عن 5 وحدات من السلعة y للمحافظة على نفس الإشباع.

4-2- تحديد TMS جبريا

لتكون لدينا دالة المنفعة: $f(y, x) = U$

بحساب التفاضل الكلي: $f'ydy + f'xdx = dU$

على طول منحنى السواء، مستوى المنفعة ثابت اي

$$\boldsymbol{dU = 0} \rightarrow f'xdx = -f'ydy \rightarrow \mathbf{TMS} = -\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{f'y}$$

$$TMSxy = \frac{Umgx}{Umgy} \quad \text{إذن}$$

مثال: $f(x,y) = X^2Y^3$

$$\mathbf{TMS} = -\frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{f'y} = \frac{2y}{3x}$$

تفسير النتيجة: يتخلى المستهلك عن وحدتين من y للحصول على 3 وحدات إضافية من X والمحافظة على مستوى الإشباع ثابت

مثال : إذا كانت لدينا دالة المنفعة التالية: $U = xy^4$

احسب TMS وبين أن منحنى السواء الذي يمثل دالة المنفعة السابقة محدبا نحو نقطة الأصل.

$$T.M.S = -\frac{dy}{dx} = \frac{umgx}{umgy} = \frac{y4}{4xy3} = \frac{y}{4x}$$

تفسير النتيجة: يتخلى المستهلك عن وحدة من y و يعوضها بـ 4 وحدات من X و يبقى محافظ على إشباعه ثابتا.

لإثبات أن منحنى السواء محدبا نستخدم العلاقة التالية

$$\frac{\boldsymbol{d\,T.M.S}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{\delta T.M.S}}{\boldsymbol{\delta x}} + \frac{\boldsymbol{\delta T.M.S}}{\boldsymbol{\delta y}}\left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right)$$

$$\frac{d\,T.M.S}{dx} = \frac{-y4}{16x^2} + \frac{4x}{16x^2}\left(\frac{-y}{4x}\right) = -\frac{5y}{16x^2}$$

$$\frac{d\,T.M.S}{dx} = -\frac{5y}{16x^2} < 0$$

إذن منحنى السواء محدبا نحو نقطة الأصل

5- معادلة القيد الميزاني:

إن منحنى السواء الخاص بالمستهلك والمبني على تفضيلاته الخاصة، يفترض انه مستقل عن دخله، ولكن في الواقع فإن المشتريات الفعلية تتوقف على مستوى دخل الفرد وعلى طريقة توزيع المستهلك لدخله الموجه للاستهلاك بناء على الأسعار السائدة في السوق، حيث أن هذا القيد يمكن أن نعبر عنه هندسيا بخط الميزانية.

وخط الميزانية يشير إلى التركيبات المختلفة من السلعتين X و y التي يمكن شراءها بنفس القدر من النقود على أساس الأسعار السائدة.

ويمكن استنتاج خط الميزانية رياضيا وبيانيا من معادلة قيد الميزانية بإعادة صياغته من الشكل y = f(x) كما يلي:

5-1 التمثيل البياني للمعادلة:

$$\boldsymbol{R = x.Px + y.Py}$$

وهي معادلة خطية من الشكل $b + ax = y$

$$y = \frac{R}{py} - \frac{Px}{Py}x$$

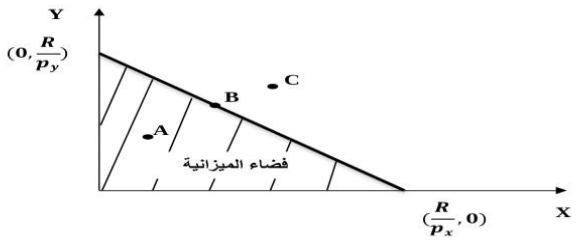
ويلاحظ أن معادلة خط الميزانية هي معادلة من الدرجة الأولى وهذا يعبر عن العلاقة الخطية بينهما،

كما أن ميلها سالب $\left(\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{Px}{Py}\right)$

وهذا دليل على انحدار منحنى خط الميزانية من الأعلى إلى الأسفل حيث يؤدي زيادة استهلاك إحدى السلعتين يقتضي تخفيض الاستهلاك من الأخرى عند نفس المستوى من الدخل الموجه للإنفاق على هذه السلعتين.

لتمثيل خط الميزانية يكفي توافر نقطتين ولتكن:

X	0	$\frac{R}{Px}$
y	$\frac{R}{py}$	0



من خلال التمثيل البياني نلاحظ ما يلي:

*عند النقطة A المستهلك سينفق جزء من دخله فقط وذلك لأنها تقع أسفل خط الميزانية، تسمى جميع النقاط التي تقع أسفل خط الميزانية بفضاء الميزانية. أي ان كل التركيبات الموجودة أسفل الخط تعني إنفاقا اقل من الدخل أي **R > yPy + xPx**

*عند النقطة B المستهلك سينفق كامل دخله وذلك لأنها تقع على خط الميزانية. أي ان كل التركيبات من السلع **x** و y الموجودة على الخط الميزاني تعني إنفاقا مساويا للدخل. أي **R = yPy + xPx**

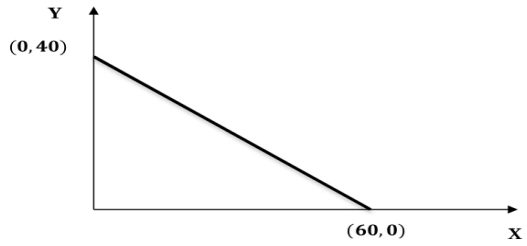
* لا يمكن للمستهلك الحصول على النقطة C لأن الانفاق فيها يفوق الدخل المتاح. كل التركيبات الموجودة فوق الخط الميزاني من اليمين تعني إنفاقا أعلى من الدخل. اي **R < yPy + xPx**

مثال 1:

أوجد معادلة خط الميزانية لمستهلك ما دخله المخصص للإنفاق على السلعتين × و y هو 120و.ن إذا علمت أن أسعار السلعتين على الترتيب هي 2 و .ن و 3 و .ن.

$$y = \frac{R}{Py} - \frac{Px}{Py}x => y = \frac{120}{3} - \frac{2}{3}x => y = 40 - \frac{2}{3}x$$

X	0	60
Y	40	0

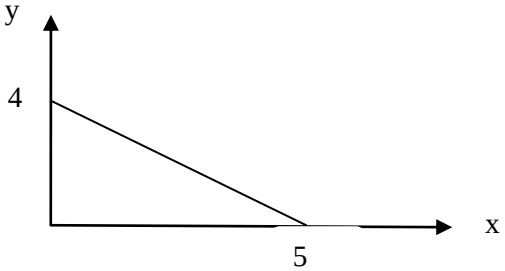


مثال2: إذا كانت لدينا المعطيات التالية:

R = 40، Px = 8، Py = 10

حدد معادلة الميزانية ومثلها بيانيا

$$40 = 8x + 10y \rightarrow y = \frac{40-8x}{10} \rightarrow y = 4 - \frac{4}{5}X$$



5-2- تحرك الخط الميزاني:

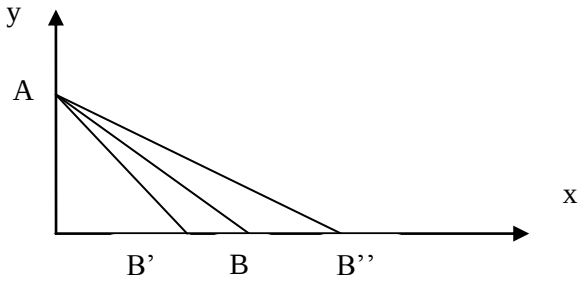
أ- أثر تغير السعر على خط الميزانية

يمكن للخط الميزاني أن يتحرك إذا تغيرت إحدى الأسعار (PX أو Py) أو الدخل (R).

فإذا افترضنا أن P_X يرتفع بقيمة ما مع ثبات R و Py ، فإن الخط الميزاني يدور من جهة اليسار اي'AB، أما إذا انخفض Px، فإن الخط الأصلي يدور من جهة اليمين أي ''AB. (العلاقة عكسية)كما يظهر في البيان التالي:

- عند ارتفاع px تنخفض النسبة R/Px (الدخل الحقيقي) اي يتحرك خط الميزانية الى الوراء.

- عند انخفاض px ترتفع النسبة R/Px (الدخل الحقيقي) اي يتحرك خط الميزانية الى الامام.

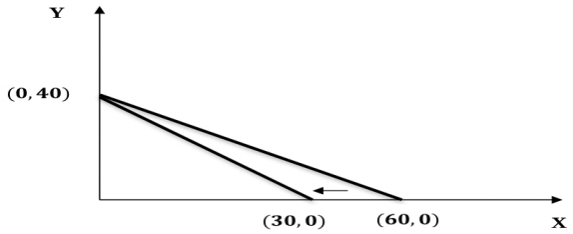


مثال:

أوجد معادلة خط الميزانية في المثال السابق الاول إذا ارتفع سعر السلعة × إلى 4 و.ن؟

$$y = \frac{R}{py} - \frac{Px}{Py}x => y = \frac{120}{3} - \frac{4}{3}x => y = 40 - \frac{4}{3}x$$

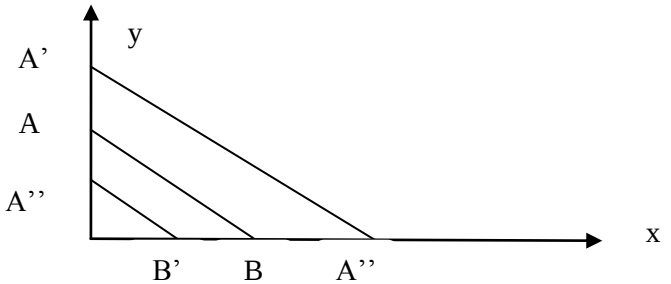
X	0	30
Y	40	0



إذا تغير سعر سلعة ما، فإن خط الميزانية سينحرف يتغير الميل في هذه الحالة عند السلعة التي تغير سعرها نحو اليسار في حالة ارتفاع السعر أو نحو اليمين في حالة انخفاض السعر (علاقة عكسية).

ب- اثر تغير الدخل على خط الميزانية:

إذا افترضنا ارتفاع في الدخل منR إلىR' و هذا مع ثبات Px و Py، فنتحصل على مستقيم جديد يكون موازيا للخط الأصلي من جهة اليمين أي A'A''، إما إذا انخفضR إلى "R نتحصل على مستقيم جديد يكون موازيا للأول من جهة اليسار B''A' كما يظهر في البيان التالي:

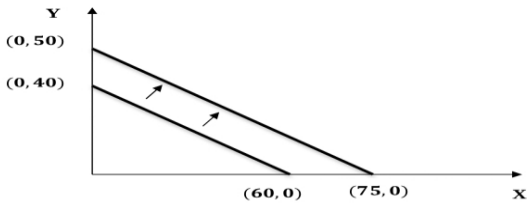


مثال :

أوجد معادلة خط الميزانية في المثال الاول السابق إذا ارتفع دخل المستهلك المخصص للإنفاق على السلعتين إلى 150 و.ن

$$y = \frac{R}{Py} - \frac{Px}{Py}x => y = \frac{150}{3} - \frac{2}{3}x => y = 50 - \frac{2}{3}x$$

X	0	75
Y	50	0



إذا تغير دخل المستهلك، فإن خط الميزانية سينتقل بشكل موازي لنفسه نفس الميل نحو الأعلى في حالة ارتفاع الدخل أو نحو الأسفل في حالة انخفاض الدخل (العلاقة طردية).

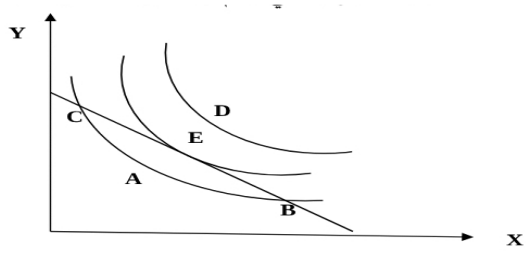
6- توازن المستهلك:

6-1- تحديد نقطة التوازن بيانيا:

إن دمج خريطة سواء المستهلك وخط ميزانيته في معلم واحد من شأنه أن يحدد لنا نقطة توازن المستهلك، وذلك كما يلي:

من خلال التمثيل البياني نلاحظ ما يلي:

* النقطة A تقع ضمن فضاء الميزانية (دخل المستهلك فيها أكبر من إنفاقه) ولكن تحقق له منفعة كلية أقل مقارنة بالنقطتين E و D ، ومنه فهي ليست بنقطة توازن.



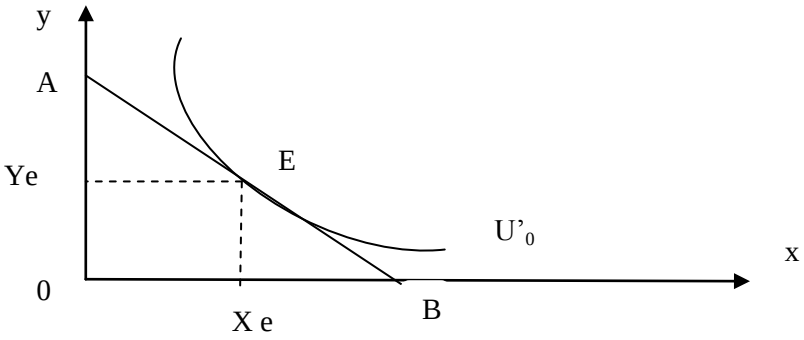
*النقطتين B و C ينفق عندهما المستهلك دخله بالكامل (الإنفاق – الدخل) ولكن تحقق له منفعة كلية أقل مقارنة بالنقطتين E و D ، ومنه فهي ليست بنقطة توازن.

* النقطة D تحقق للمستهلك منفعة كلية أكبر مقارنة بالنقاط A–B–C–E ولكنها تفوق الدخل المتاح للمستهلك (الإنفاق أكبر من) الدخل ومنه فهي ليست بنقطة توازن.

* النقطة E ينفق عندها المستهلك دخله بالكامل (الانفاق = الدخل) وتحقق في نفس الوقت للمستهلك منفعة كلية أكبر مقارنة بالنقاط A–B–C ومنه فهي تمثل نقطة التوازن.

*عند النقطة E نلاحظ حدوث تماس بين منحنى السواء وخط الميزانية، هذا ما يقودنا إلى استخلاص النتيجة التالية:

نقطة توازن المستهلك بيانيا هي عبارة عن نقطة تماس أعلى منحنى سواء مع خط الميزانية(**تحقق قيد الميزانية**)، وأية نقطة أخرى لا تحقق قيد الميزانية، فإنها لا تحقق قيد تعظيم الإشباع.



أن المستهلك العقلاني الذي يهدف إلى تعظيم منفعته فهو سيختار الثنائية (X_e, y_e) التي تحقق له أكبر منفعة. والتي يكون فيها المنحنى(U_0) مماس مع الخط الميزاني AB حيث:

$$\text{ميل المنحنى } (U_0) = \text{ميل الخط AB} = \frac{-PX}{\text{Py}}$$

عموما فان عند نقطة تماس (وليس تقاطع) منحنى السواء مع خط الميزانية يتساوى ميل منحنى السواء$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ مع ميل خط الميزانية$\left(-\frac{Px}{Py}\right)$. وهو ما يعبر عن بالصيغة الرياضية العامة التالية:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{Px}{Py}$$

6-2- تحديد نقطة التوازن حسابيا

تمر طريقة لاغرونج في حالة تعظيم المنفعة الكلية للمستهلك بالخطوات الآتية:

أ – تشكيل برنامج المستهلك:

يتكون برنامج المستهلك من شقين هما الهدف والقيد :

*حيث يهدف المستهلك إلى تحقيق أقصى منفعة ممكنة (تعظيم المنفعة = الهدف).

* لكن يكون مقيد بدخل محدد، وكذلك بأسعار السلع السائدة في السوق (معادلة الدخل= القيد)

وعليه يمكن كتابة برنامج المستهلك من الشكل الآتي:

$$\text{برنامج المستهلك} \begin{cases} Max: \quad U = f(x,y) \\ \mathrm{R} = \mathrm{xPx} + \mathrm{yPy} \end{cases}$$

ب – تشكيل دالة لاغرونج:

تتكون دالة لاغرونج من مجموع دالتي الهدف والقيد الذي يكون في شكل دالة صفرية أي:

دالة لاغرونج = دالة الهدف + مضاعف لاغرونج (دالة القيد على شكل معادلة صفرية)

$$\mathbf{L = f(x,y) + \lambda\ (R - xPx - yPy)}$$

حيث

L: تمثل دالة لاغرونج.

λ : يمثل متغير مجهول يسمى مضاعف لاغرونج، وهو مجهول مساعد يمثل المنفعة الحدية للدخل.

في هذه الحالة يهدف المستهلك إلى تعظيم منفعته تحت قيد الدخل والأسعار.

وتكتب شروط الدرجة الأولى كما يلي:

يتمثل الشرط الأول في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرونج بالنسبة للمتغيرات λ،x،y كما يلي:

$$\ldots \begin{cases} Lx \to Ux - \lambda \mathrm{Px} = 0 \ldots . (1) \\ Ly \to Uy - \lambda \mathrm{Py} = 0 \ldots . (2) \\ L\lambda \to R - \mathrm{xPx} - \mathrm{yPy} = \cdots (3) \end{cases} \quad \begin{cases} L'x = 0 \to f'_x - \lambda \mathrm{Px} = 0 \ldots . (1) \\ L'y = 0 \to \mathrm{f'_y} - \lambda \mathrm{Py} = 0 \ldots . (2) \\ L'\lambda = 0 \to \mathrm{R} - \mathrm{xPx} - \mathrm{yPy} = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

إذا نحصل على جملة ثلاث معادلات بثلاث مغيرات نقوم بحلها :

– نستخرج λ من المعادلتين (1) و (2) نجد:

من (1) : $\frac{f\prime x}{\mathrm{Px}} = \lambda$

من (2): $\frac{f\prime y}{\mathrm{Py}} = \lambda$

بالمساواة بين قيمتي λ نجد :

$$\frac{f'x}{\mathrm{Px}} = \frac{f'y}{\mathrm{Py}} = \lambda$$

باستعمال خواص التناسب يمكن إعادة كتابة المساواة من الشكل الآتي:

$$\frac{Umgx}{Umgy} = \frac{Px}{Py} \text{ أي } \frac{f'x}{f'y} = \frac{Px}{Py}$$

$$\to \frac{(1)}{(2)} = \frac{Umgx}{Px} = \frac{Umgy}{Py} \to \frac{Umgx}{Umgy} = \frac{Px}{Py} = T.M.S \text{ الشرط الأساسي للتوازن}$$

ويؤدي حل المعادلات السابقة إلى إيجاد قيم التوازن $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \lambda)$

إذا نستنتج أن تطبيق الشرط الأول حسب طريقة لاغرونج يقودنا إلى نفس الشرط الأول لتوازن المستهلك في حالة سلعتين.

مثال: إذا كانت لدينا دالة المنفعة التالية:

$$\mathrm{U(x,y) = (x+2)\ (y+1) = xy + 2y + x + 2 = xy + x + 2y + 2}$$

وكانت أسعار y، x، هي على التوالي : 2، 5، بينما دخل المستهلك هو 51

حدد نقطة التوازن و مثلها بيانيا وأحسب قيمة المنفعة عندها.

L = (x+2) (y+1) + λ (51-2x-5y)

$$\begin{cases} Lx = y + 1 - 2\lambda = 0 \dots . (1) \\ Ly = x + 2 - 5\lambda = 0 \dots . (2) \\ L\lambda \to 51 - 2x - 5y = \cdots (3) \end{cases} \quad \frac{(1)}{(2)} \to \frac{y+1}{x+2} = \frac{2}{5}$$

$$\to 5(Y+1) = 2(x+2) \to 5y + 5 = 2x + 4 \to 5y = 2x + 4 - 5 \to y = \frac{2x-1}{5} \dots (4)$$

(4) في (3):

$$\to \mathbf{51 - 2x - 5\left(\frac{2x-1}{5}\right) = 0 \to 51 - 2x - 2x + 1 = 0}$$

$$\to \mathbf{52 = 4x \to x = \frac{52}{4} = 13}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2(13)-1}{5} = \frac{25}{5} = 5}$$

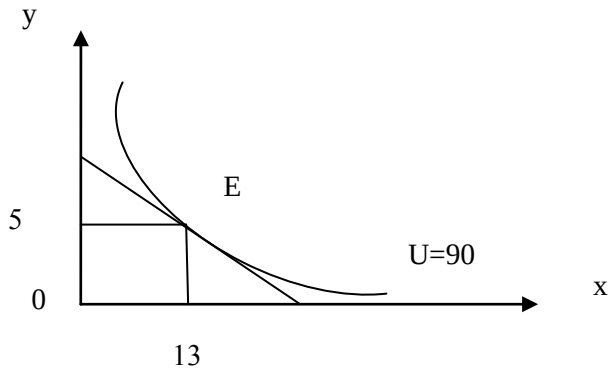
$$\lambda = \frac{\boldsymbol{y+1}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{3}$$

إذا يحقق المستهلك توازنه في النقطة E (13, 5).

حساب قيمة المنفعة الكلية في نقطة التوازن

$$U(13{,}5) = (13+2)(5+1) = 15.6 = 90$$

أما تمثيل نقطة التوازن بيانيا فيكون كما يلي:



ت- تفسير مضاعف لاغرانج

$$\boldsymbol{L = U_{(x,y)} + \lambda(R - xPx - yPy)}$$

بحساب شروط الدرجة الأولى

$$\begin{cases} Lx = U'x - \lambda Px = 0 \dots . (1) \\ Ly = U'y - \lambda Py = 0 \dots . (2) \\ L\lambda \to R - xPx - yPy = \cdots (3) \end{cases}$$

$$U = f(x, y)$$

بحساب التفاضل الكلي للدالة U:

$$\boldsymbol{U = U'x\, dx + U'y\, dy}$$

$$R - xPx - yPy \to dR = Px\, dx + Py\, dy$$

$$\frac{du}{dR} = \frac{U'x\, dx + U'y\, dy}{Px\, dx + Py\, dy} = \frac{\lambda Px\, dx + \lambda Py\, dy}{Px\, dx + Py\, dy} = \frac{\lambda(Px\, dx + Py\, dy)}{Px\, dx + Py\, dy} = \lambda$$

$$\lambda = \frac{dU}{dR}$$

تمثل λ المنفعة الحدية للدخل أو منفعة آخر وحدة نقدية منفقة على السلعة المدروسة :أي أنه إذا ارتفع الدخل بوحدة نقدية ترتفع المنفعة الكلية (U) بقيمة λ

كما في المثال السابق فان λ =3 أي انه كلما زاد الدخل بوحدة نقدية واحدة زادت المنفعة الكلية ب 3.

مثال: أوجد توازن المستهلك بطريقة شرطي التوازن لمستهلك ما دالة منفعته Ut(x;y) = xy إذا علمت أن دخله المخصص للإنفاق على السلعتين x و y هو 120 وأن أسعار السلعتين x و y على الترتيب هي 2 و 3. ثم تأكد من صحة ذلك عبر التمثيل البياني لهذا التوازن.

الحل:

إيجاد توازن المستهلك

$$Ut(x,y) = xy => umgx = y, Umgy = x$$
$$\frac{Umgx}{Px} = \frac{Umgy}{Py} => \frac{y}{2} = \frac{x}{3} => y = \frac{2}{3}x$$
$$R = x.Px + y.Py => 120 = 2x + 3y => 120 = 4x => x = 30$$
$$x = 30 => y = \frac{2}{3}(30) => y = 20$$
$$E(x,y) = (30,20)$$
$$Ut(x,y) = (30)(20) = 600$$

التمثيل البياني لتوازن المستهلك

معادلة منحنى السواء

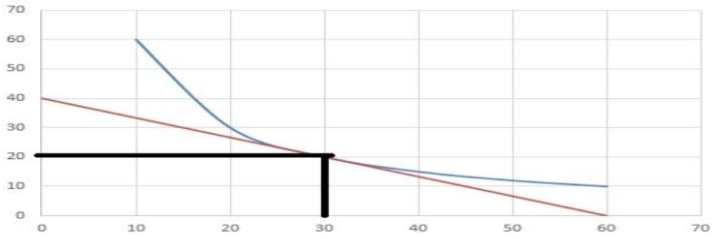
$$Ut(x,y) = Ut_0 => x.y = 600 => y = \frac{600}{x}$$

X	10	20	30	40	50	60
Y	60	30	20	15	12	10

معادلة خط الميزانية

$$\mathbf{120 = 2x + 3y} => y = 40 - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}$$

X	0	60
Y	40	0



نلاحظ حدوث تماس بين منحنى السواء وخط الميزانية عند النقطة التي إحداثياتها x=30 و y=20.

وللتأكد أكثر نقوم بإيجاد التوازن رياضيا:

ميل منحنى السواء

$$y = \frac{600}{x} => \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-600}{x^2}$$

ميل خط الميزانية

$$y = 40 - \frac{2}{3}x => \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2}{3}$$

عند التوازن يتساوى ميل منحنى السواء مع ميل خط الميزانية:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{Px}{Py} => \frac{-600}{x^2} = -\frac{2}{3} => x = \sqrt{\frac{600 * 3}{2}} = 30$$
$$y = \frac{600}{x} = \frac{600}{3} = 20$$
$$E(x,y) = (30,20)$$

Summary:

Ordinal utility: OU

Studies how consumers rank their preferences for different goods and services. This theory is a useful tool for understanding consumer behavior.

Indifference curve: IC

It shows all the combinations of two goods that would give a consumer might be indifferent between having one apple and two oranges, or having two apples and one orange.

Marginal rate of substitution: MRS

Is the number of units of one good that a consumer is willing to give up in order to get one additional unit of another good, while maintaining the same level of satisfaction. For example: if a consumer has a MRS of 2 oranges per apple, it means that they are willing to give up two oranges in order to get one additional apple.

Budget line:

Is a graphical representation (straight line with a downward slope) of all the possible combinations of two goods that a consumer can purchase with a given budget at current prices, and fully spending the incomes. It is also known as a budget constraint.

The slope of the budget line is equal to the negative of the ratio of the prices of the two goods

Consumer equilibrium point:

Is a point where the consumer maximizes their utility given their budget constraint. this point can be found graphically by finding the point of tangency between the consumer's indifference curve and their budget line.

Lagrange methods:

Also known as the method of **Lagrange multipliers**, is a mathematical method for finding the extremum (maximum or minimum) of a function subject to one or more constraints.

Is a combination of the objective function and constraint function weighted by the Lagrange multiplier λ where is constant that is used to weight the constraints in Lagrange function.