محاضرات الاقتصاد الجزئي -1- د. فتني مايا

نظرية الإنتاج

تمهيد

تشبه نظرية الإنتاج نظرية المنفعة في عدة نواحي، ففي نظرية الإنتاج تعتبر الوحدة الاقتصادية موضع التحليل هي المنشأة بدلا من المستهلك الفرد وكما أن المستهلك يسعى إلى تحقيق أكبر قدر من الإشباع عن طريق الكيفية التي يوزع بها دخله فإن المنشأة في نظرية الإنتاج تسعى إلى تحقيق أكبر قدر من الإنتاج بقدر معين من التكاليف وذلك عن طريق الكيفية التي يمكن بها لهذه المنشأة تجميع عوامل الإنتاج .

يتم تحليل نظرية الإنتاج وفقا لفترتين: المدى القصير والطويل

1) تعريف الإنتاج هو تلك الأنشطة المرتبطة بعملية توفير السلع والخدمات من خلال تحويل المدخلات إلى مخرجات ، كما يعرف بأنه خلق المنفعة أو القيمة التي تشبع الاحتياجات البشرية من السلع والخدمات المختلفة وذلك من خلال تغيير عنصر أو أكثر من العناصر التالية: الزمن المكان، الشكل والحيازة.

2) تعريف العملية الإنتاجية: وهي حركة عناصر الإنتاج التي من خلالها يمكن إشباع رغبات المجتمع، وتعتمد على مراحل عملية تحويل المواد الخام مرورا بالتبادل وصولا إلى العملية الاستهلاكية حيث تتطلب حديثا عنصر التنظيم.

3) عناصر الإنتاج: تقسم عناصر الإنتاج تقليديا إلى أربعة عناصر العمل، الأرض، رأس المال والتنظيم؛ والعوائد التي تتلقاها هذه العناصر نتيجة مساهمتها في العملية الإنتاجية هي الأجور للعمل، الريع للأرض الفائدة لرأس المال والربح للتنظيم.

أ) العمل: وهو عنصر بشري يضم الأعداد من الناس التي تعمل فعلا أو القادرة على العمل والباحثة عنه، والمقصود بالعمل هو مجموعة الجهود البشرية الجسدية أو العقلية التي تهدف إلى تحقيق دخل مالي، لذلك بعد العمل أي جهد يقدمه الإنسان أثناء مشاركته في العملية الإنتاجية، ويطلق على المقابل المالي الذي يدفع لكل فرد لقاء عمله في الإنتاج اسم الأجر أو الراتب.

ب) الأرض: تعرف الأرض على أنها كافة الموارد الطبيعية كما وجدت عليه في الطبيعة فهي لا تقتصر على ما هو موجود من موارد على سطحها بل تشمل الأنهار والبحيرات الطبيعية والموارد المعدنية والنباتات الطبيعية وباقي باطن الأرض؛ إذن مفهوم الأرض يتضمن الموارد الطبيعية الموجودة والأراضي الزراعية وتلك التي تستخدم في الصناعة والسكن، تستخدم هذه الموارد من طرف أصحابها نقابل عائد يسمى الريع.

ج) رأس المال: تشمل في أي فترة معينة من الزمن رصيد المجتمع أو ثروته من كافة الموارد التي صنعها الإنسان لتساعده في إنتاج الحاجات الاستهلاكية بطريق مباشر أو غير مباشر، ويقسم رأس المال من حيث مساهمته في الإنتاج إلى رأس مال إنتاجي الآلات المواد الخام السلع النصف مصنعة المباني وما شبه ورأس مال اجتماعي (الطرق الجسور السدود، المدارس المستشفيات وغيرها ويسمى أيضا البنى التحتية. ويحصل عنصر رأس المال على عائد مقابل مساهمته في العملية الإنتاجية هو الفائدة.

د) التنظيم: إن عمل المنظم يتمثل في تجميع عناصر الإنتاج سابقة الذكر (العمل الأرض ورأس المال) في عملية إنتاجية معينة يساهم في اتخاذ قرار القيام بها وتحمل مخاطر تنفيذها وذلك باستخدام المهارات الفنية والإدارية المتوفرة في سبيل إنتاج السلعة أو الخدمة، ويحصل المنظم على جزء أو نسبة من الأرباح لمساهمته في إدارة وتنظيم العملية الإنتاجية.

4) خصائص الإنتاج: يتميز الإنتاج بعدة خصائص وهي:

- ✓ **لها استخدام واحد أو استخدامات بديلة:** إذا كان عنصر الإنتاج مميزا باستخدام واحد فإن السلعة المنتجة تكون وحيدة، أما إذا كان مميزا بعدة استخدامات فإن الناتج يكون متعددا .
- ✓ **عناصر الإنتاج ثابتة أو متغيرة** :أهمية هذا التصنيف تتمثل في أن الأولى هي مصدر النفقات الثابتة (المباني الآلات التجهيزات..) التي لا تتأثر بالإنتاج أما الثانية فهي مصدر النفقات المتغيرة والتي تتغير مع حجم الإنتاج(المواد الأولية، العمل....)
- ✓ **عناصر الإنتاج قابلة للتجزئة أو غير قابلة:** العناصر القابلة للتجزئة هي العناصر التي يمكن تقسيمها إلى وحدات صغيرة جدا، وبالتالي يمكن استخدامها بمرونة في العملية الإنتاجية لإعراض زيادة الإنتاج أو تخفيضه كالعمل الذي يمكن تقسيمه إلى ساعات العمل، ففي حالة الانتعاش وزيادة الإنتاج يمكن العمل لساعات إضافية وعند الكساد وانخفاض الإنتاج يمكن تخفيض الساعات الفعلية للعمل . أما العناصر الغير قابلة للتجزئة فهي العناصر التي يمكن تجزئتها كالآلة مثلا.

- ✓ **قدرة عناصر الإنتاج على التحرك أو عدم التحرك:** إن انتقال عناصر الإنتاج إما أن يتم جغرافيا أو وظائفيا .ففي الحالة الأولى يتحرك عنصر الإنتاج من مكان إلى آخر، أما الحالة الثانية فينتقل من استخدام لآخر، ويكون الهدف من وراء ذلك تحقيق أكبر دخل ممكن كما يمكن له الانتقال من وظيفة إلى أخرى وخاصة الوظائف التي تتطلب مهارات بسيطة، أما الوظائف التي تتطلب مهارات معقدة فيستحيل الانتقال إليها إلا بعد التكوين والتدريب لاكتساب الخبرة والمهارة المناسبتين علاوة على ما سبق يمكن نقل بعض الأنواع من رأس المال كالآلات ولا يمكن نقل البعض الآخر كالمباني ولكن يمكن تغيير استخداماتها .

اولا- تحليل سلوك المنتج في الفترة القصيرة:

1. دالة الإنتاج:

يشير تعبير دالة الإنتاج إلى العلاقة الكمية بين مدخلات المؤسسة من عوامل الإنتاج ومخرجاتها من سلعة ما خلال فترة زمنية معينة، إذ يتوقف حجم الإنتاج على حجم الموارد المستخدمة في العملية الإنتاجية .ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$x = f(L, K)$$

حيث:

X: حجم الإنتاج

L: عنصر العمل (وغالبا ما يعبر عنه بعدد العمال أو ساعات العمل)

K :عنصر رأس المال (وهو مجموع وسائل الإنتاج من آلات مباني، ...)

لدراسة دوال الإنتاج يجب التمييز بين فترتين الفترة القصيرة والفترة الطويلة تتميز الفترة القصيرة بتغير عنصر واحد وثبات العناصر الأخرى، أما الفترة الطويلة فتتميز بتغير كل عناصر الإنتاج مع بعض .

2.دوال الإنتاجية في المدى القصير

1.2.الإنتاجية الكلية

تكون دالة الإنتاج في الفترة القصيرة تابعة لعامل إنتاجي متغير واحد فقط، أي أن حجم الإنتاج x يتوقف على الحجم المستخدم من العنصر الإنتاجي(العمل أو رأس المال) .

- **الإنتاجية الكلية للعمل (X أوPTL)**

هي حجم الإنتاج المحصل عليها من الإنتاج باستعمال كميات متغيرة من عنصر العمل (عدد العمال، أو عدد ساعات العمل) مع ثبات العوامل الأخرى، ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$PTL = x = f(L)$$

- **الإنتاجية الكلية لرأس المال (X أو PTK)**

هي حجم الإنتاج المحصل عليها من الإنتاج باستعمال كميات متغيرة من عنصر رأس المال مع ثبات العوامل الأخرى، ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$PTK = x = f(K)$$

2.2 الإنتاجية الحدية

هي التغير في الإنتاجية الكلية الناتج عن تغير عنصر الإنتاج بوحدة واحدة، أو هي إنتاجية الوحدة الأخيرة المستعملة من عنصر الإنتاج .

- **الإنتاجية الحدية للعمل (Pmgl)**

هي التغير في الإنتاجية الكلية الناتج عن تغير عنصر العمل بوحدة واحدة، أو هي إنتاجية الوحدة الأخيرة المستعملة من عنصر العمل، ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$PmgL = \frac{\Delta x}{\Delta L} = \frac{\partial f(L)}{\partial L}$$

- **الإنتاجية الحدية لرأس المال (PmgK)**

هي التغير في الإنتاجية الكلية الناتج عن تغير عنصر رأس المال بوحدة واحدة، أو انتاجية الوحدة الأخيرة المستعملة من عنصر رأس المال، ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$PmgK = \frac{\Delta x}{\Delta K} = \frac{\partial f(K)}{\partial K}$$

3.2 الإنتاجية المتوسطة :

هي المساهمة النسبية لكل وحدة من عنصر الإنتاج في الإنتاجية الكلية، أي إنتاجية الوحدة الواحدة من عنصر الإنتاج

- **الإنتاجية المتوسطة للعمل (PML)**

هي المساهمة النسبية لكل وحدة من عنصر العمل في الإنتاجية الكلية، أي إنتاجية الوحدة الواحدة من عنصر العمل، وهو مقدار الناتج الإضافي نتيجة تشغيل عامل إضافي . ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$\text{الناتج المتوسط لعنصر العمل} = \frac{\text{الناتج الكلي}}{\text{عدد العمال}}$$

$$PML = \frac{x}{L} = \frac{f(L)}{L}$$

- **الإنتاجية المتوسطة لرأس المال (PMK)**

هي المساهمة النسبية لكل وحدة **من** عنصر رأس المال **في** الإنتاجية الكلية، **أي** إنتاجية الوحدة الواحدة **من** عنصر رأس المال، .ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية:

$$\text{الناتج المتوسط لعنصر راسالمال} = \frac{\text{الناتج الكلي}}{\text{حجم راسمال}}$$

$$PMK = \frac{x}{K} = \frac{f(K)}{K}$$

مثال :1

الجدول التالي يوضح تغير حجم الإنتاج تبعا لتغير عنصر العمل (عدد العمال) مع مستوى ثابت لعنصر رأس المال5-K

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	5	15	30	40	48	54	52	52	48	45

المطلوب :

-حساب الإنتاجية الحدية والمتوسطة .

-التمثيل البياني لمنحنيات الإنتاجية الكلية، المتوسطة، والحدية .

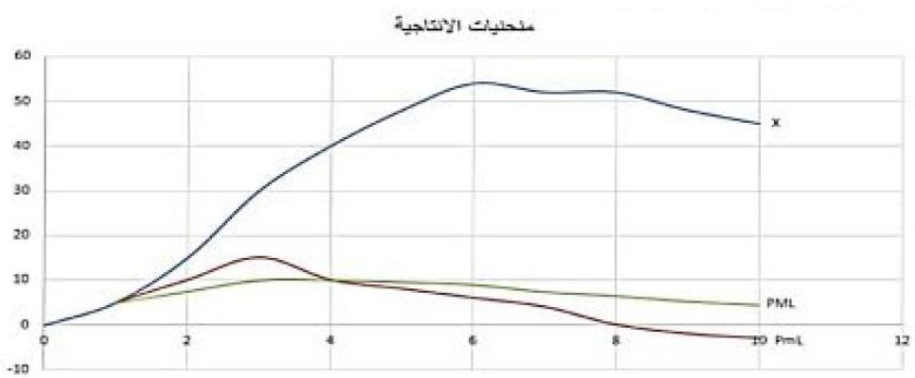
-التعليق على التمثيل البياني

الحل:

1. حساب الإنتاجية الحدية والمتوسطة

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	5	15	30	40	48	54	52	52	48	45
¨PmgL	-	5	10	15	10	8	6	4	0	-2	-3
PML	-	5	7.5	10	10	9.6	9	7.4	6.5	5.3	4.5

2.التمثيل البياني لمنحنيات الإنتاجية الكلية المتوسطة، والحدية



3.التعليق على التمثيل البياني :

نلاحظ من خلال التمثيل البياني ما يلي :

- عند إضافة وحدات متتالية من عنصر العمل إلى مقدار ثابت من عنصر رأس المال، فإن الإنتاجية الكلية تتزايد في البداية بمعدل متزايد ثم تستمر في

التزايد بمعدل متناقص حتى تصل إلى حدها الأقصى ثم تبدأ بعد ذلك في التناقص.

-تصل الإنتاجية الكلية إلى أقصى قيمة لها عند تنعدم الإنتاجية الحدية .

-تصل الإنتاجية المتوسطة إلى أقصى قيمة لها عند تساويها (تقاطعها) **مع** الإنتاجية الحدية .

ومن خلال هذه العلاقات بين الإنتاجية الكلية المتوسطة والحدية يمكننا تحديد ثلاثة مناطق أو مراحل للإنتاج:

المنطقة الأولى :محصورة بين 0 ونقطة تساوي الإنتاجية المتوسطة مع الإنتاجية الحدية $PML = PmgL$ كلما تم استخدام وحدات إضافية من عنصر العمل كانت الإنتاجية الكلية متزايدة بمعدل متزايد، وبتزايد الإنتاجية المتوسطة أي زيادة كفاءة وإنتاجية العامل، وبأن الإنتاجية المتوسطة أكبر من الإنتاجية الحدية وتسمى هذه المرحلة بمرحلة تزايد الغلة

المنطقة الثانية محصورة بين نقطة تساوي$PML = PmgL$ ونقطة انعدام الإنتاجية الحدية$PmgL$

كلما تم استخدام وحدات إضافية من عنصر العمل كانت الإنتاجية الكلية متزايدة بمعدل متناقص وبالتالي تناقص الإنتاجية المتوسطة، وتصل الإنتاجية الكلية الى أقصى قيمة لها عند انعدام الإنتاجية الحدية .وهذا ما يعرف بقانون تناقص الغلة، أي أن هذه المرحلة تتميز بتناقص الغلة .

المنطقة الثالثة: محصورة بين نقطة انعدام الإنتاجية الحدية$PmgL$ و$-\infty$

كلما تم استخدام وحدات إضافية من عنصر العمل كانت الإنتاجية الكلية متناقصة، مما يؤدي إلى استمرار تناقص الإنتاجية المتوسطة وهذا لكون الإنتاجية الحدية سالبة، أي أن هذه المرحلة تتميز بغلة سالبة .

تعتبر المنطقة الثانية أحسن منطقة (مرحلة) لأن الإنتاج الكلي فيها يستمر في التزايد نتيجة استخدام وحدات إضافية من العمل إلى غاية تحقيق هدف تعظيم الإنتاجية في نهاية هذه المرحلة، وتعرف هذه المنطقة بالمنطقة الاقتصادية .

مثال2:

دالة الإنتاج لمنتج **ما من** الشكل التالي :

$$x = f(L,K) = -L^3K^2 + 10L^2K + 20L$$

بفرض أن المنتج على يستخدم آلة **إنتاجية واحدة** K=1 على المدى **القصير:**

- أوجد دوال الإنتاجية الكلية، المتوسطة والحدية للعمل خلال الفترة القصيرة .
- استخرج رياضيا حدود المنطقة الاقتصادية . او ما يعرف بالمنطقة المثلى للانتاج؟
- قدم التمثيل البياني لمنحنيات الإنتاجية .

1.إيجاد دوال الإنتاجية الكلية المتوسطة، والحدية للعمل خلال الفترة القصيرة

•الإنتاجية الكلية للعمل (X أو PTL)

$$K = 1$$
$$PTL = -L^3(1)^2 + 10L^2(1) + 20L$$
$$PTL = -L^3 + 10L^2 + 20L$$

•الإنتاجية الحدية للعمل (Pmgl)

$$PmgL = \frac{\partial f(L)}{\partial L} = -3L^2 + 20L \quad + 20$$

الإنتاجية المتوسطة للعمل **(PML)**

$$PML = \frac{f(L)}{L} = \frac{-L^3 + 10L^2 + 20L}{L} = -L^2 + 10L + 20$$

2.حدود المنطقة الاقتصادية

المنطقة الاقتصادية محصورة بين$PML = Pmgl$ و$Pmgl = 0$

$$PML = Pml => -3L^2 + 20L + 20 = -L^2 + 10L + 20 => -2L^2 + 10L = 0$$

$$-2L^2 + 10L = 0 => \begin{cases} L = 0 & \text{مرفوض} \\ L = 5 & \text{مقبول} \end{cases}$$

$$Pmgl = 0 => -3L^2 + 20L + 20 = 0 => \Delta = (20)^2 - 4(-3)(20) = 640$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{-20+\sqrt{640}}{2(-3)} = -0{,}8 \text{ مرفوض} \\ L = \dfrac{-20-\sqrt{640}}{2(-3)} = 7{,}55 \text{ مقبول} \end{cases}$$

ومنه المنطقة الاقتصادية محدودة بتوظيف 5 وحدات من العمل كحد أدنى و 7.55 وحدة كحد أقصى أي

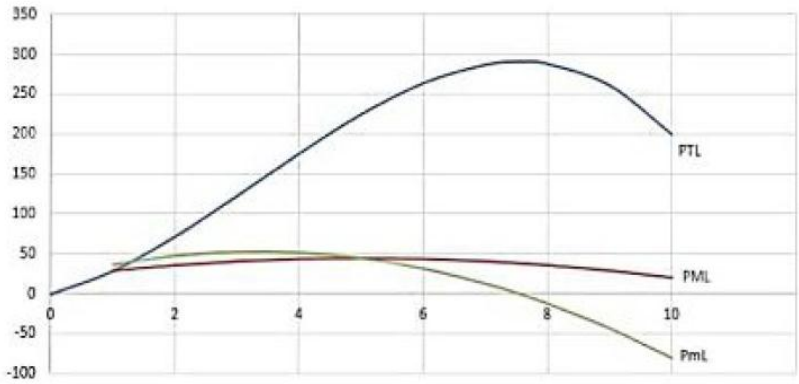
$L \in [5;\ 7.55]$ حتى يحصل على إنتاج محصور ما بين 225 و 290.7 وحدة من المنتوج.

3.التمثيل البياني لمنحنيات الإنتاجية

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PTL	0	29	72	123	176	225	264	287	288	261	200
PML	20	29	36	41	44	45	44	41	36	29	20
¨PmgL	20	37	48	53	52	45	32	13	12-	-43	-80

التعليق على التمثيل البياني

نلاحظ من خلال التمثيل البياني ما يلي :



- ✓ عند إضافة وحدات متتالية من عنصر العمل إلى مقدار ثابت من عنصر رأس المال، فإن الإنتاجية الكلية تتزايد في البداية بمعدل متزايد ثم تستمر في التزايد بمعدل متناقص حتى تصل إلى حدها الأقصى ثم تبدأ بعد ذلك في التناقص.
- ✓ تصل الإنتاجية الكلية إلى أقصى قيمة لها عند تنعدم الإنتاجية الحدية .
- ✓ تصل الإنتاجية المتوسطة إلى أقصى قيمة لها عند تساويها (تقاطعها) مع الإنتاجية الحدية .

3- مراحل الإنتاج:

تمر العملية الإنتاجية بثلاث مراحل رئيسية هي:

3-1- المرحلة الأولى:

تبدأ المرحلة الأولى للإنتاج مع بداية العملية الإنتاجية، وتنتهي عند تساوي الناتج الحدي مع الناتج المتوسط، حيث يكون الناتج المتوسط عند أقصى قيمة له، وتتميز بالخصائص الآتية:

- تزايد الناتج الكلي بمعدل متزايد.
- تزايد الناتج الحدي.
- تزايد الناتج المتوسط.

إن المنتج يقوم بعملية الإنتاج في المرحلة الأولى حيث يزداد الناتج الكلي بمعدل متزايد، مما يحقق له تزايدا في الأرباح، ويعتبر حافزا له للتوسع في عملية الإنتاج.

3-2- المرحلة الثانية:

تبدأ المرحلة الثانية للإنتاج من نقطة تساوي الناتج الحدي مع المتوسط، وتنتهي عند بلوغ الناتج الكلي ذروته، وانعدام الناتج الحدي، وتتميز بالخصائص الآتية:

- تزايد الناتج الكلي بمعدل متناقص.
- تناقص الناتج الحدي.
- تناقص الناتج المتوسط.

إن المنتج الرشيد يفضل المرحلة الثانية للقيام بعملية الإنتاج لأن الناتج الكلي يبلغ ذروته في هذه المرحلة، وعليه تسمى هذه المرحلة بالمنطقة الاقتصادية للإنتاج، لأن فيها يتحقق الهدف الاقتصادي للمنتج المتمثل في **تعظيم الربح** عن طريق تعظيم الإنتاج.

تعتبر المرحلة الثانية هي **الأمثل** للإنتاج لأنه يتم فيها استخدام عنصر العمل بكفاءة اقتصادية، حيث تؤدي كل زيادة في عنصر العمل إلى زيادة في كمية الإنتاج الكلي، والذي يصل إلى ذروته العظمى خلال هذه المرحلة.

3-3- المرحلة الثالثة:

تبدأ المرحلة الثانية من أعظم قيمة يبلغها الناتج الكلي وتنتهي عند نهاية العملية الإنتاجية، وتتميز بالخصائص الآتية:

- تناقص الناتج الكلي.
- تناقص الناتج الحدي ويكون سالبا.
- تناقص الناتج المتوسط.

المنتج الرشيد يتوقف عن الإنتاج خلال المرحلة الثالثة بسبب تناقص النواتج الثلاث مع زيادة العنصر المتغير، وعليه يعتبر الحد الفاصل بين المرحلتين الثانية والثالثة مؤشرا مهما لاتخاذ القرارات الإنتاجية الرشيدة.

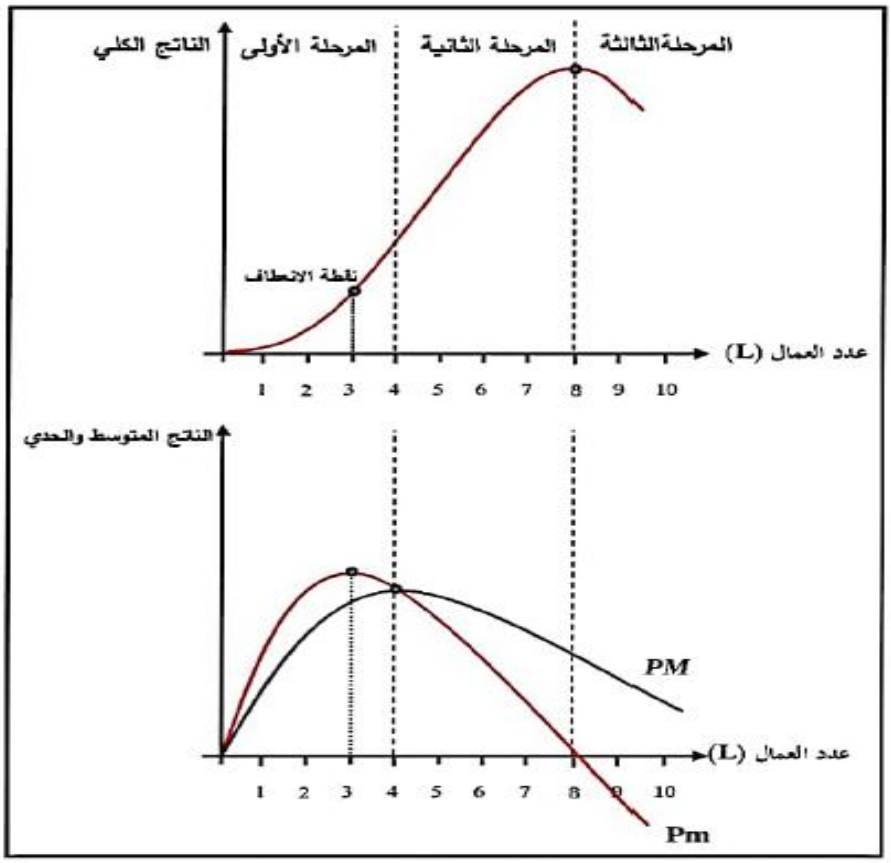
مثال:

يبين الجدول الآتي العلاقة بين الناتج الكلي والحدي والمتوسط المتعلق بقطعة أرض (العنصر الإنتاجي الثابت) محدودة المساحة ومقدرة ،بهكتارين بالإضافة إلى اليد العاملة (العنصر الإنتاجي المتغير) الذي يتغير بعامل واحد.

الأرض	عدد العمال	الناتج الكلي	الناتج الحدي	الناتج المتوسط
2	1	10	10	10
2	2	30	20	15
2	3	60	30	20
2	4	80	20	20
2	5	95	15	19
2	6	108	13	18
2	7	112	4	16
2	8	112	0	14
2	9	108	-4	12
2	10	100	-8	10

يمكن توضيح نتائج الجدول السابق ضمن الشكل البياني التالي:

يتضح من الجدول السابق أنه عند زيادة عدد العمال يتزايد الناتج الكلي بمعدل متزايد، كما يكون كل من الناتج الحدي والمتوسط في حالة تزايد.



يبدأ الناتج الحدي في التناقص عند العامل الثالث (يبدأ سريان قانون تناقص الغلة)، حيث يتزايد الناتج الكلي بمعدل متناقص، حتى يصل إلى أعظم قيمة له أين يكون الناتج الحدي منعدم)، ثم يتناقص بعدها.

كما نلاحظ أن الناتج المتوسط يأخذ في التناقص بعد حد معين بسبب تزايد الناتج الكلي بمعدل متناقص ثم تناقصه.

تمر العملية الإنتاجية بالمراحل الآتية:

المرحلة الأولى من (L=0 إلى L=4)

تبدأ من بداية العملية الإنتاجية إلى غاية العامل الرابع أين يتساوى الناتج الحدي مع الناتج المتوسط.

* المرحلة الثانية : من (L=4 إلى L=10)

تبدأ عند العامل الرابع وتنتهي عند العامل الثامن، حيث يبلغ الناتج الكلي أعظميته، وتمثل المرحلة الإنتاجية المفضلة بالنسبة للمنتج الرشيد (المنطقة الاقتصادية للإنتاج).

* المرحلة الثالثة: (L=8 إلى L=10)

تبدأ عند العامل الثامن وتنتهي عند العامل العاشر، بانتهاء العملية الإنتاجية.

4- العلاقة بين الناتج الكلي والناتج الحدي والناتج المتوسط: من خلال ما سبق يمكننا استخلاص ما يلي:

4-1- العلاقة بين الناتج الكلي والناتج الحدي

باعتبار الناتج الحدي هو التغير الحاصل في الناتج الكلي، فإن العلاقة بينهما تمر بالخطوات الآتية:

- يتزايد الناتج الكلي في بداية العملية الإنتاجية بمعدل متزايد فيكون الناتج الحدي متزايد.
- عند بلوغ الناتج الحدي ذروته يكون الناتج الكلي عند نقطة الانعطاف.
- بعد نقطة الانعطاف يستمر الناتج الكلي في التزايد لكن بمعدل متناقص، وعليه يصبح الناتج الحدي متناقص.
- يستمر الناتج الكلي في التزايد حتى يبلغ ذروته (أعظميته) فينعدم الناتج الحدي.
- بعد وصول الناتج الكلي إلى أعظم قيمة له يتناقص الناتج الكلي، ويأخذ الناتج الحدي قيما سالبة.

4-2- العلاقة بين الناتج الحدي والناتج المتوسط:

تمر علاقة الناتج الحدي بالناتج المتوسط بالمراحل الآتية:

- ضمن المرحلة الإنتاجية الأولى تكون قيمة الناتج الحدي أكبر من الناتج المتوسط.
- عند الحد الفاصل بين المرحلة الأولى والثانية تتساوى قيمة الناتج الحدي مع الناتج المتوسط.
- ضمن المرحلتين الثانية والثالثة تصبح قيمة الناتج الحدي أقل من الناتج المتوسط.

ثانيا- تحليل سلوك المنتج في المدى الطويل:

يمكن للمنتج في الفترة الطويلة أن يقوم بإجراء تغيرات على جميع عوامل الإنتاج بعد أن كان ذلك غير ممكن في الفترة القصيرة، وبالتالي السماح بتطوير الطاقات الإنتاجية التي تنعكس على تغير الإنتاج .تواجه المؤسسة المشكلة التالية : كيف يمكن تجميع عوامل الإنتاج لإنتاج أكبر كمية من السلعة x بمستوى محدد من التكاليف .

في الفترة الطويلة تكون جميع عناصر الإنتاج متغيرة، ولذا تغير دالة الإنتاج على العلاقة بين حجم الإنتاج من سلعة معينة والكميات المستخدمة من جميع عناصر الإنتاج ويحكم سلوك هذه العلاقة قانون غلة الحجم.

1- غلة الحجم

معناه أن عند زيادة جميع عناصر الإنتاج بنسبة معينة أي عند زيادة حجم العملية الإنتاجية يزيد الناتج الكلي كما هو متوقع، والسؤال الذي يطرح نفسه هو هل يزيد الإنتاج في هذه الحالة بنسبة مماثلة لنسبة الزيادة في عناصر الإنتاج (الزيادة في الحجم) أو بنسبة أقل أو بنسبة أكبر ؟

والإجابة أن الأمر يختلف باختلاف نوعية النشاط الإنتاجي ولنفس النشاط تبعا للتقنية المستخدمة في الإنتاج، وعموما هناك ثلاث احتمالات للعائد على الحجم هي:

أ- انواع غلة الحجم:

- **العائد الثابت على الحجم (غلة الحجم الثابتة)**: في هذه الحالة فإن زيادة كميات جميع عناصر الإنتاج بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة في الإنتاج الكلي بنسب متماثلة، فزيادة كل من L و K بنسبة 10% يؤدي إلى زيادة الناتج الكلي بنسبة 10%.
- **العائد المتزايد على الحجم (غلة الحجم المتزايدة):** يكون العائد على الحجم متزايدا إذا أدت زيادة جميع عناصر الإنتاج بنسبة معينة إلى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة أكبر، كأن يؤدي مثلا زيادة جميع عناصر الإنتاج بنسبة 10% إلى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 15%.
- **العائد المتناقص على الحجم (غلة الحجم المتناقصة):** في حالة العائد المتناقص على الحجم، تؤدي الزيادة في الكميات المستخدمة من جميع عناصر الإنتاج بنسبة معينة إلى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة أقل، فزيادة أعداد العمال والمقادير المستخدمة من رأس المال بنسبة 10% تنعكس على زيادة الإنتاج ولكن بنسبة أقل في الناتج ولتكن 7% مثلا.

وعموما فإن معرفة طبيعة العائد على الحجم من حيث الثبات أو التزايد أو التناقص، تعد من المعلومات ذات الأهمية القصوى بالنسبة لاتخاذ القرارات الخاصة باختيار حجم المنشأة. واتجاه العديد من المنشآت الكبرى في عالمنا المعاصر نحو الاندماج في منشأت أخرى أو الاستحواذ على منشأة صغيرة ما هو إلا مثالا لأحد القرارات التي تهدف المنشأة من خلالها إلى استغلال ميزات الحجم في خفض التكاليف وزيادة الأرباح.

ب- تحديد طبيعة غلة الحجم

يتم تحديد طبيعة غلة الحجم إذا ارتفعت عوامل الإنتاج L و K بنسبة t% في دالة الإنتاج التي تأخذ الشكل $x = f(,K)$ نقوم باستبدال المتغيرات Lو K بـ tl وtk للحصول على دالة إنتاج جديدة من الشكل :

$$X^* = f(tL, tK)$$

لتحديد طبيعة غلة الحجم نقسم الدالة الجديدة على القديمة (X^*/x) فنحصل على t^n و S درجة تجانس الدالة، فإذا كان :

$n = 1$ نقول عن غلة الحجم أنها ثابتة

$n > 1$ نقول عن غلة الحجم أنها متزايدة

$n < 1$ نقول عن غلة الحجم أنها متناقصة

مثال1:

- حدد طبيعة غلة الحجم إذا كانت دالة الإنتاج لمنتج ما من الشكل التالي: $x = L^2 + K^2$

الحل:

- **طبيعة غلة الحجم**

$$X = L^2 + K^2 => x^* = (tL)^2 + (tK)^2 = t^2L^2 + t^2K^2 = t^2(L^2 + K^2)$$

$$\frac{x^*}{x} = \frac{= t^2(L^2 + K^2)}{L^2 + K^2} = t^2$$

ومنه n=2 إذن غلة الحجم متزايدة لأن $n > 1$

مثال: 2

- حدد طبيعة غلة الحجم إذا كانت دالة الإنتاج لمنتج ما من الشكل التالي: $x = L^2K^2$

الحل:

$$x = L^3K^2 \quad => X^* = (tL)^3(tK)^2 \quad => x^* = t^3L^3K^2t^2$$

$$\frac{X^*}{X} = \frac{= L^3K^2t^3t^2}{L^3K^2} = t^5$$

ومنه S=5 إذن غلة الحجم متزايدة لأن $n > 1$

أو مباشرة $\alpha + \beta = 3 + 2 = 5 > 1$ ومنه غلة الحجم متزايدة

2- طريقة منحنيات الناتج المتساوي

يستخدم تحليل الناتج المتساوي والتكاليف المتساوية كبديل للطريقة السابقة وذلك لإيضاح العلاقة بين الكميات المستخدمة من عوامل الإنتاج وأسعارها على نحو موازي لما تم تناوله في نظرية منحنيات السواء .

منحنى الناتج المتساوي هو التمثيل البياني للتوليفات المختلفة من عنصري الإنتاج l و K التي يستطيع بواسطتها المنتج تحقيق نفس الإنتاجية الكلية أي (إنتاج نفس الكمية من سلعة ما).. بتعبير آخر هو نفسه منحنى السواء عند المستهلك.

فإذا كان حجم الإنتاج ممثل بدالة الإنتاج $x = f(K, L)$ وكان مستوى الإنتاج المحدد X_0 فتكون معادلة منحنى الناتج المتساوي الممثلة لهذا المستوى من الإنتاج من الشكل التالي :

$$f(K, L) = X_0 => K = f(L)$$

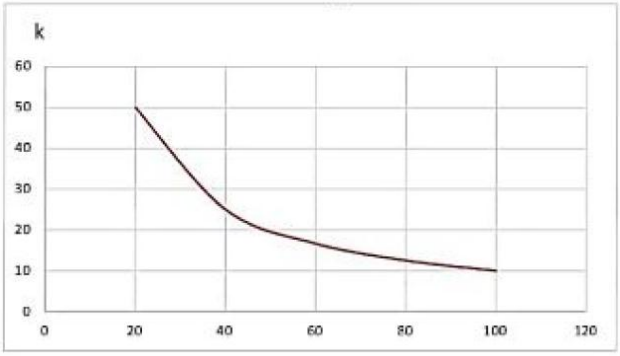
مثال1:

دالة الإنتاجية الكلية لمنتج ما من الشكل التالي :

$$x = f(K, L) = L.K$$

إذا كان مستوى الإنتاج المرغوب لهذا المنتج هو. x=1000 فأوجد معادلة منحنى الناتج المتساوي .

الحل :



$$X_0 = 100 => L.K = 1000 => K = \frac{1000}{L}$$

إن لمنحنيات الناتج المتساوي نفس خصائص منحنيات السواء وهي:

أ- أنها تنحدر سلبيا وهو ما يؤشر حقيقة أنه إذا كانت المنشأة تريد أن تقلل من استخدام رأس المال فإن عليها أن تزيد من استخدام العمل لإنتاج المستوى نفسه من الناتج والبقاء على منحنى الناتج المتساوي نفسه.

ب- إن منحنيات الناتج المتساوي محدبة نحو نقطة الأصل بسبب المعدل الحدي للإحلال الفني المتناقص للإحلال بين العمل ورأس المال والمعدل الحدي للإحلال هو عبارة عن عدد الوحدات من عنصر إنتاجي التي تحل محل وحدة واحدة من عنصر إنتاجي آخر مع الاحتفاظ بمستوى الناتج نفسه

ت- إن منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع أبدا لأن تقاطعها يعنى أن المنشأة لا تستطيع أن تنتج مستويين مختلفين من الناتج بالمزيج نفسه من العمل ورأس المال.

ث- كلما انتقل نحو الأعلى، كلما زادت الكميات المستعملة من L وk ومنه ترتفع الإنتاجية، كما أن منحنيات الناتج المتساوي لنفس المنتج لا تتقاطع فيما بينها وإنما تكون متوازية، ولا تتقاطع منحنيات الناتج المتساوي مع محور الفواصل أو التراتيب .

3- المعدل الحدي للاحلال التقني (الفني) $TMST_{L/K}$

يعرف المعدل الحدي للإحلال الفني بأنه كمية رأس المال الذي يمكن أن تتنازل عنه المؤسسة بزيادة كمية العمل بمقدار وحدة واحدة، حيث يستمر بقاؤه على نفس منحنى الكمية المتساوية. كذلك فإن هذا المعدل يساوي حاصل قسمة الناتج الحدي للعمل على الناتج الحدي لرأس المال، ويقاس المعدل بالقيمة المطلقة لميل المماس في نقطة ما من نقاط منحنى الناتج المتساوي.

$$TMST_{LK} = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \left|\frac{\Delta K}{\Delta L}\right| = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}$$

أما في الحالة المستمرة (عند نقطة) يحسب بالعلاقة التالية :

$$TMST_{\mathrm{L/K}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathrm{L}} = \frac{\mathrm{Pm}g\mathrm{L}}{\mathrm{Pmgk}}$$

مثال :

$$K = \frac{1000}{L} => TMST_{\mathrm{L/K}} = \left|\frac{\partial K}{\partial \mathrm{L}}\right| = \frac{1000}{\mathrm{L}^2}$$

4- خط التكاليف المتساوية

يوضح خط (منحنى) التكاليف المتساوية التوليفات المختلفة من عنصري الإنتاج العمل ورأس المال التي يمكن للمؤسسة أو المنتج الحصول عليها بقدر معين من التكاليف(الميزانية). فإذا كانت الميزانية المخصصة للإنتاج (التكاليف) CT تستخدم لشراء عنصري الإنتاج العمل L ورأس المال K أسعارهما P_L و P_K تكون معادلة خط التكاليف المساوية من الشكل:

$$CT = L.P_L + KP_K => K = \frac{CT}{P_K} - \frac{P_L}{P_K}L$$

حيث تمثل نسبة الأسعار $\frac{P_L}{P_K}$ ميل خط الميزانية

ويمكن رسم خط التكاليف بمعلومية عاملي الإنتاج وهما نفرض أن كل الموارد المخصصة لشراء المستخدمات الإنتاجية انفقت على رأس المال فإن نقطة تقاطع خط التكاليف المتساوية مع المحور العمودي (محور رأس المال) هي: $TC = 0.L + KP_K$

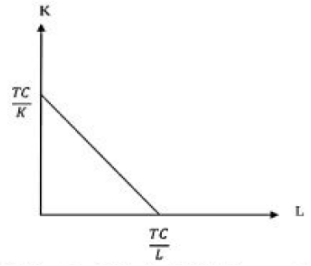
أما إذا فرضنا إنفاق كل الموارد على عنصر العمل فإن نقطة تقاطع خط التكاليف المتساوية مع المحور الأفقي (محور العمل) هي:

$$TC = LP_L + 0K$$

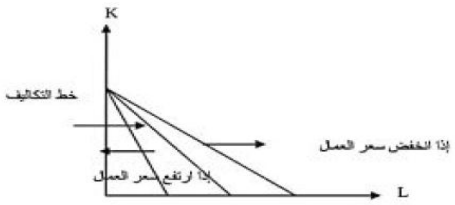
أما ميل خط التكاليف المتساوية فإنه: $\frac{dK}{dL} = -\frac{PL}{PK}$

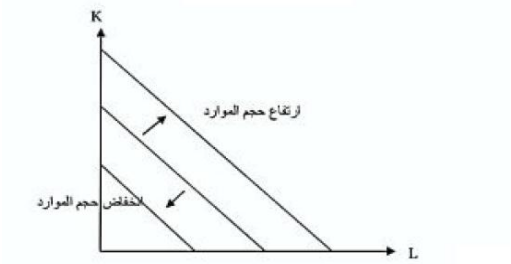
ويعني هذا أنه لاستخدام مقادير أكبر من رأس المال يجب التخلي عن قسم من العمال والشكل الموالي يوضح خط التكاليف المتساوية.

التغير في وضع خط التكاليف: يتغير وضع خط التكاليف نتيجة للتغير في ميزانية المنتج أو تغير سعر عنصر العمل أو سعر عنصر رأس المال، وفيما يلي نوضح التغير في وضع خط التكاليف نتيجة للتغير في كل من الميزانية وأسعار عنصري الإنتاج.



أ- **الحالة الأولى:** نفرض أنه حدث تغير في سعر العمل مرة انخفض ومرة أخرى زاد، والشكل التالي يوضح التغير في وضع. خط التكاليف.





ب الحالة الثانية:

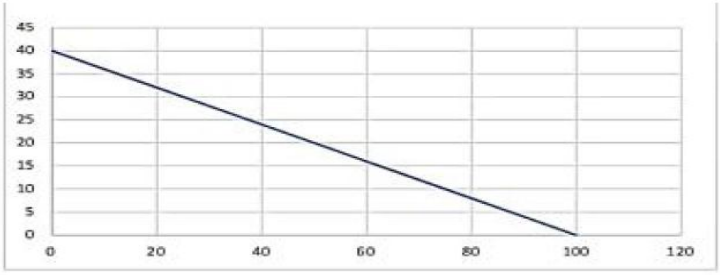
نفرض الآن أن حجم الموارد (الميزانية) تغير في حين لم يتغير كل من سعري عاملي الإنتاج وسنوضح ذلك من خلال الشكل التالي:

مثال :

إذا كانت الميزانية المخصصة للإنتاج 2000 و كل من أسعار عنصري الإنتاج العمل ورأس المال 20 و . ن و 50 و من على التوالي، فإن خط التكاليف المتساوية يكون من الشكل:

$$K = \frac{C}{P_K} - \frac{P_L}{P_K}L \Rightarrow K = \frac{2000}{50} - \frac{20}{50}L \Rightarrow K = 40 - 0.4L$$

L	0	100
K	40	0

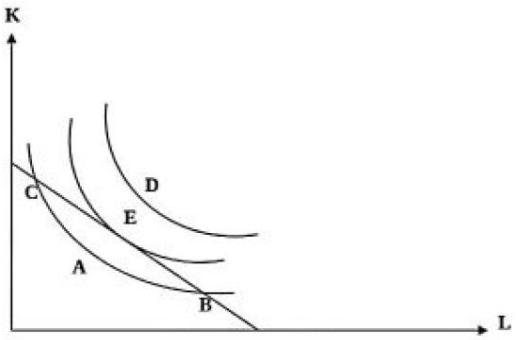


5- توازن المنتج:

يسعى المنتج إما إلى تعظيم الإنتاج أو تقليل التكاليف، فالإستراتيجية الأولى يختارها عندما يكون مقيدا بالميزانية -تكاليف الإنتاج- أي له مبلغ محدد يستثمره في الإنتاج. وهذه المشكلة هي شبيبة بالمشكلة التي تواجه المستهلك (أكبر إشباع في حدود الميزانية) وبالمثل فإن المنشأة ستحقق أكبر قدر من الإنتاج وذلك بتوزيع التكاليف المخصصة للعملية الإنتاجية. ويختار الإستراتيجية الثانية عندما يكون مقيدا بالإنتاج أي لا يمكنه بيع كمية من المنتج تكون أكبر من مستوى معين.

5-1- توازن المنتج بيانيا:

يسعى المنتج إلى الوصول للتوليفة المثلى من عنصري الإنتاج والتي تسمح له بتحقيق أقصى مستوى إنتاج بمستوى معين من التكاليف عند الأسعار السائدة .ويتحقق ذلك بالوصول إلى أعلى منحنى ناتج متساوي ممكن الوصول إليه بالتكاليف التي حددتها المؤسسة، وذلك بتماس منحنى الناتج المتساوي مع خط التكاليف المتساوية .



عند نقطة التوازن تكون المؤسسة قد حققت أكبر إنتاج ممكن بقدر معين من التكاليف CT. ويتم الحصول على نقطة التوازن رياضيا بالمساواة بين ميل خط التكاليف المتساوية $\frac{P_L}{P_K}$ وميل منحنى الناتج المتساوي $\frac{\partial K}{\partial L}$ أي: $\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{P_L}{P_K}$

$$\alpha = TMST_{LK} \begin{cases} TMST_{LK} = \dfrac{Pmg_L}{Pmg_K} \\ \alpha = \dfrac{-P_L}{P_k} \end{cases}$$

5-2- توازن المنتج رياضيا:

أ- <u>الشرط اللازم</u> لتحقيق أكبر إنتاج ممكن بتكلفة محددة يكون كالأتي :

$$\frac{\text{الإنتاجية الحدية لعنصر العمل}}{\text{سعر عنصر رأس المال}} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية لعنصر رأس المال}}{\text{سعر عنصر رأس المال}} \qquad \frac{PmgL}{PL} = \frac{PmgK}{Pk}$$

ب- <u>الشرط الكافي</u> ويتحدد بالتكلفة (الميزانية) المخصصة للإنتاج بالصيغة التالية :

$$CT = L.P_L + K.P_k$$

<u>ومنه لتعظيم الإنتاج</u> من سلعة ما بميزانية (أو تكلفة) محددة لابد من تحقق الشرطين :

$$\begin{cases} \dfrac{PmgL}{PL} = \dfrac{PmgK}{Pk} \\ CT = L.P_L + K.P_k \end{cases}$$

كما يمكن استخدام طريقة لاغرونج لإيجاد توازن هذا المنتج كما يلي :

$$\begin{cases} Max\ x = f(L,K) \\ S/C \\ CT = L.P_L + K.P_k \end{cases}$$

أي تعظيم الإنتاجية الكلية$Max\ x = f(L,K)$ تحت قيد (S/C : sous contrainte) الميزانية المخصصة للعملية الإنتاجية ولحل هذا النموذج يتم صياغة دالة الهدف (مضاعف لاغرونج)كما يلي :

$$L = f(L,K) + \lambda(\mathrm{C} - \mathrm{L}.\mathrm{P_L} - \mathrm{K}.\mathrm{P_K})$$

<u>شروط المرتبة الأولى</u> :المشتقات الجزئية بالنسبة لجميع المتغيرات مساوية للصفر

$$\begin{cases} l'_L = \frac{\delta l}{\delta L} = 0 \\ l'_K = \frac{\delta l}{\delta K} = 0 => \\ l'_\lambda = \frac{\delta l}{\delta \lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l'_L = \frac{\delta x}{\delta L} - \lambda \mathrm{P}_L = 0 \\ l'_K = \frac{\delta x}{\delta K} - \lambda \mathrm{P}_L = 0 => \\ \mathrm{CT} - \mathrm{L}.\mathrm{P_L} - \mathrm{K}.\mathrm{P_K} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\mathrm{PmgL}}{\mathrm{PL}} \\ \lambda = \frac{\mathrm{PmgK}}{\mathrm{PK}} \\ \mathrm{CT} = \mathrm{L}.\mathrm{P_L} + \mathrm{K}.\mathrm{P_K} \end{cases}$$

لإيجاد توازن المنتج نحل جملة المعادلات السابقة والتي تعطينا نفس شرطي التوازن السابقين .

<u>ولتقليل التكاليف لابد من تحقق الشرطين</u> :

$$\begin{cases} C = L.P_L + K.P_k \\ S/C \\ \frac{PmgL}{PL} = \frac{PmgK}{Pk} \end{cases}$$

كما يمكن استخدام طريقة لاغرونج لإيجاد توازن هذا المنتج كما يلي :

$$\begin{cases} Min\ C = L.P_L + K.P_k \\ S/C \\ x = f(L,K) \end{cases}$$

أي تقليل التكاليف $Min\ CT = L.P_L + K.P_k$ تحت قيد (S/C : sous contrainte)$x = f(L,K)$ مستوى الانتاج الامثل المحقق سابقا او المخطط له ولحل هذا النموذج يتم صياغة دالة الهدف (مضاعف لاغرونج)كما يلي :

$$L = L.P_L + K.P_k + \lambda(x * -f(L,K))$$

<u>شروط المرتبة الأولى</u> :المشتقات الجزئية بالنسبة لجميع المتغيرات مساوية للصفر

$$\begin{cases} l'_L = \frac{\delta l}{\delta L} = 0 \\ l'_K = \frac{\delta l}{\delta K} = 0 => \\ l'_\lambda = \frac{\delta l}{\delta \lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l'_L = \mathrm{P}_L - \lambda \frac{\delta x}{\delta L} = 0 \\ l'_K = \mathrm{P}_k - \lambda \frac{\delta x}{\delta K} = 0 => \\ x * -f(L,K) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{PmgL}} \\ \lambda = \frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{PmgK}} \\ x * = f(L,K) \end{cases}$$

لإيجاد توازن المنتج نحل جملة المعادلات السابقة والتي تعطينا نفس شرطي التوازن السابقين .

مثال1:

دالة الإنتاج لمنتج ما من الشكل التالي:

$$\boldsymbol{x = f(L,K) = L.K}$$

حيث L يمثل عنصر العمل (ساعات عمل) و K عنصر رأس المال (معدات وآلات)، X حجم الإنتاج (وحدة منتجة)، تقدر الميزانية المخصصة للعملية الإنتاجية بـ1000 وحدة نقدية وأسعار عوامل الإنتاج هي 10 و من لعنصر العمل و 40 و من لعنصر رأس المال .

المطلوب :

ما هو حجم الإنتاج الأمثل لهذا المنتج أو (بصيغة أخرى ما هي الكميات المثلى من عوامل الإنتاج التي تمكن المنتج من تعظيم إنتاجه من هذه السلعة) بطريقتي:

- شرطي التوازن
- مضاعف لاغرونج

- طريقة الإحلال والاستبدال

الحل :

1. حجم الإنتاج الأمثل لهذا المنتج بطريقة شرطي التوازن

$$x = f(L,K) = L.K$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{PmL}}{\mathrm{PL}} = \frac{\mathrm{PmK}}{\mathrm{PK}} \\ C = \mathrm{L}.\mathrm{P_L} + \mathrm{K}.\mathrm{P_K} \end{cases} => \begin{cases} \frac{K}{10} = \frac{L}{40} \\ 1000 = 10l + 40K \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \mathrm{L} = 4\mathrm{K} \\ 1000 = 80\mathrm{K} \end{cases} => \begin{cases} L = 50 \\ K = 12.5 \end{cases} => x = (50)(12.5) = 625$$

ومنه بميزانية قدرها 1000 وحدة نقدية على المنتج استخدام 50 وحدة من عنصر العمل و 12.5 وحدة من عنصر رأس المال لحصول على أقصى إنتاج 625 وحدة .

2.حجم الإنتاج الأمثل لهذا المنتج بطريقة مضاعف لاغرونج

$$\begin{cases} Max\ x = f(L,K) \\ S/C \\ 1000 = 10L + 40K \end{cases}$$

$$l = (L.K) + \lambda(1000 - 10\mathrm{L} - 40)$$

شروط المرتبة الأولى :المشتقات الجزئية بالنسبة لجميع المتغيرات مساوية للصفر

$$\begin{cases} l'_L = \mathrm{K} - 10\lambda = 0 \\ l'_K = \mathrm{L} - 40\lambda = 0 \\ l'_\lambda = 1000 - 10\mathrm{L} - 40\mathrm{K} = 0 \end{cases} => \begin{cases} \lambda = \frac{K}{10} \\ \lambda = \frac{\mathrm{L}}{40} \\ 1000 = 10L + 40K \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \frac{K}{10} = \frac{\mathrm{L}}{40} \\ 1000 = 10L + 40K \end{cases} => \begin{cases} L = 4K \\ 1000 = 80K \end{cases} => \begin{cases} L = 50 \\ K = 12.5 \end{cases}$$

$$=> x = (50)(12.5) = 625$$

ومنه بميزانية قدرها 1000 وحدة نقدية على المنتج استخدام 50 وحدة من عنصر العمل و 12.5 وحدة من عنصر رأس المال لحصول على أقصى إنتاج 625 وحدة .

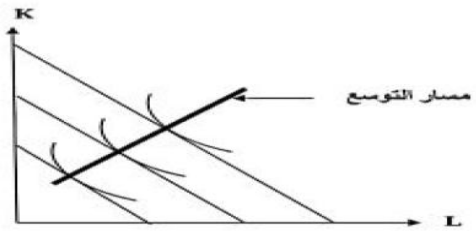
3.حجم الإنتاج الأمثل لهذا المنتج بطريقة الاحلال والاستبدال

$$x = L.K$$
$$1000 = 10L + 40K => K = 25 - 0.25\,L$$
$$x = L(25 - 0.25L) => x\ = 25L - 0.25L^2$$
$$PmL = 0 => 25 - 0.5L = 0 => L = 50$$
$$K = 25 - 0.25(50) = 12.5$$
$$x = (50)(12.5) = 625$$

ومنه بميزانية قدرها 1000 وحدة نقدية على المنتج استخدام 50 وحدة من عنصر العمل و 12.5 وحدة من عنصر رأس المال لحصول على أقصى إنتاج 625 وحدة

6- مسار التوسع: (دالة المسار الامثل للتوسع)

إذا رغبت المؤسسة في زيادة الإنتاج، فإن ذلك يتطلب زيادة التكاليف أي الميزانية المخصصة للإنتاج وهنا نحصل على نقطة توازن جديدة بسبب انتقال خط التكاليف المتساوية إلى أعلى ونفس الشيء في حالة رغبتها في تخفيض الإنتاج .فإذا قمنا بالتوصيل بين نقاط التوازن المختلفة نتيجة انتقال خط التكاليف المتساوية نحصل على ما يسمى بمسار التوسع .

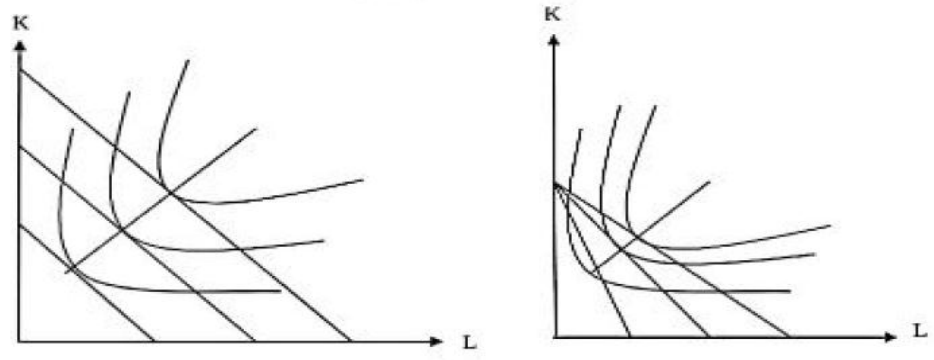


ويمكن الحصول على معادلة مسار التوسع باستخدام شرط تساوي الإنتاجية الحدية للنقود :

$$\frac{PmgL}{PL} = \frac{PmgK}{PK} => K = F(L)$$

اي انه المحل الهندسي لتوازن المنتج عندما تتغير ميزانية إنفاق المنتج مع بقاء أسعار عناصر الإنتاج أو العكس. فعندما يتغير سعر أحد عوامل الإنتاج مع بقاء سعر العامل الآخر وكذا ميزانية الإنفاق دون تغيير. فهو نفسه منحنى استهلاك الدخل ومنحنى استهلاك السعر في نظرية المستهلك

حالة تغير أسعار عناصر الإنتاج **حالة تغير ميزانية المنتج**



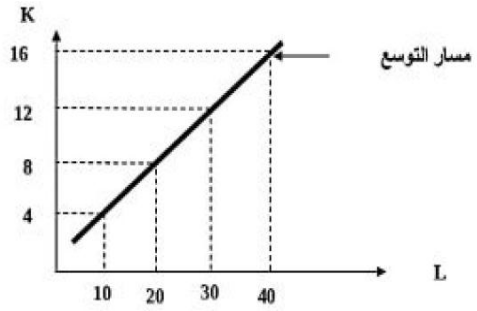
مثال :

مسار التوسع إذا كانت دالة الإنتاجية الكلية لمنتج ما من الشكل التالي :

$$x = f(K, L) = L.K$$

وأسعار عنصري الإنتاج العمل ورأس المال 20 و من و 50 و من على التوالي تكون من الشكل :

$$\frac{PmL}{PL} = \frac{PmK}{PK} => \frac{K}{20} = \frac{L}{50} => K = 0.4L$$



7- دالة الانتاج كوب دوغلاس:

تعتبر دالة كوب دوقلاص شكل من أشكال دوال الإنتاج، فهو يفسر السلوك الإنتاجي وعلاقته بعوامل الإنتاج، ويمكن أن يستخدم في دراسة عملية الإنتاج على مستوى المنشأة وفي دراسة عمليات الإنتاج على مستوى الاقتصاد ككل وهي تعتبر دالة متجانسة والتي إذا ضرب كل عامل فيها بمقدار معين فإنه يمكننا استخراج هذا المقدار من الدالة، أي خارج الأقواس أما القوة n (الأس) فتسمى درجة التجانس أو درجة التجانس التابع، وهو يقيس الغلة أو العائد المتحصل لعوامل الإنتاج ويمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$x = AL^{\alpha}K^{\beta}$ حيث

X: حجم الإنتاج L و K: عوامل الإنتاج

A: عدد ثابت

α : مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل

β:مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال

البرهان الرياضي

$$E_{X/L} = \frac{\partial x}{\partial L}.\frac{L}{X} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}\frac{L}{AL^{\alpha}K^{\beta}} = \alpha$$

ومنهα هي مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل.

$$E_{X/K} = \frac{\partial x}{\partial K}.\frac{K}{X} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1} = \beta\frac{\alpha AL^{\alpha}K^{\beta}}{AL^{\alpha}K^{\beta}} = \beta$$

ومنهβ هي مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال .

لتحديد طبيعة غلة الحجم نستعمل نفس الطريقة السابقة، حيث نفترض ارتفاع عوامل الإنتاج L و K بنسبة%t في دالة الإنتاج التي تأخذ الشكل $x = AL^{\alpha}K^{\beta}$باستبدال المتغيرات بـtl و tk للحصول على دالة إنتاج جديدة من الشكل $x^* = F(tL, tK)$ فنحصل على ما يلي :

$$x^* = F(tL, tK) = A(tL)^{\alpha}(tK)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta} = t^{\alpha+\beta}X => n = \alpha + \beta$$

ومنه في حالة دوال كوب دوقلاس تتحدد غلة الحجم مباشرة بمجموع مرونة العمل α ومرونة رأس المال β فإذا كانت

$\alpha + \beta = 1$ نقول عن غلة الحجم أنها ثابتة **(مرونة الإنتاج بالنسبة لعاملي الإنتاج معا)**

$\alpha + \beta > 1$ نقول عن غلة الحجم أنها متزايدة

$\alpha + \beta < 1$ نقول عن غلة الحجم أنها متناقصة

8- الدوال المتجانسة:

إن كل دالة متجانسة تحقق متطابقة "أويلر" (قاعدة أويلر الشهيرة)وتنص هذه المتطابقة على أن مجموع جداء النواتج الحدية لعناصر الإنتاج بعدد الوحدات المستخدمة منها يساوي جداء الكمية المنتجة بـ n أي:

$$x^* = \frac{\partial x}{\partial L}.L + \frac{\partial x}{\partial K}.K = nx$$

و نقول عن هذه الدالة أنها متجانسة من الدرجة (n)

. فإذا كانت $n > 1$ فذلك يعني أن مضاعفة عنصري الإنتاج العمل (L) ورأس المال (K) بنفس النسبة أدى إلى مضاعفة الإنتاج بنسبة أكبر وهذه هي حالة غلة الحجم المتزايدة.

في مثل هذه الحالة إذا قامت المؤسسة بتعويض عنصري العمل ورأس المال نتيجة استفادتها من خدماتها على أساس ناتجيها ،الحديين فإن مجموع ما يحصل هذين العنصرين من عوائد نتيجة مساهمتهما في عملية الإنتاج مساويا إلى إجمالي الإنتاج المتحقق، بمعنى أن هذا الإنتاج يستنفد بكامله من قبل هذين العنصرين الإنتاجيين، ونكون هنا أمام القاعدة المعروفة باسم قاعدة "نفاذ المنتج"

وإذا كانت n = 1 فذلك يعني أن مضاعفة عنصري الإنتاج العمل (L) ورأس المال (K) بنفس النسبة أدى إلى مضاعفة الإنتاج الكلي بنفس تلك النسبة وهذه هي حالة غلة الحجم الثابتة.

في مثل هذه الحالة لا يأخذ عنصرا الإنتاج كل الإنتاج المتحقق، بل جزءا منه فقط، وهنا تكون المؤسسة قد توسعت في استخدام عنصري الإنتاج أي توسعت في حجمها (مستوى نشاطها أكثر من اللازم، ومن الأفضل لها أن تتجزأ حتى تتجنب الضياع المترتب عن هذا التوسع الزائد عن حاجة المؤسسة.

. وإذا كانت $n < 1$ فذلك يعني أن مضاعفة عنصري الإنتاج العمل (L) ورأس المال (K) بنفس النسبة ترتب عنه مضاعفة الإنتاج الكلي بنسبة تقل عن تلك النسبة وهذه هي حالة غلة الحجم المتناقصة

وفي مثل هذه الحالة، التعويض الذي يأخذاه عنصرا الإنتاج يكون أكبر من الإنتاج المحقق، وهذا أمر مستبعد ومصلحة المؤسسة في مثل هذه الحالة تقتضي التوسع في استخدام عنصري الإنتاج، طالما أنها تتحقق نتيجة هذا التوسع زيادة أكبر في الإنتاج الكلي.

9- مرونات الانتاج:

تعرف مرونة الإنتاج بأنها درجة استجابة الإنتاج للتغير في العنصر الإنتاجي وتحسب كالآتي:

أ- مرونة العمل:

$$El = \frac{\Delta x}{\Delta L}.\frac{L}{x}$$

حيث أن مرونة الإنتاج: E

الإنتاج الكلي: x عنصر الإنتاج (العمل): L

وتفسر مرونة العمل على انه كل زيادة في العمل ب 1% تزداد الانتاجية بقيمة El %

ب- مرونة راس المال:

$$Ek = \frac{\Delta x}{\Delta k}.\frac{k}{x}$$

وتفسر مرونة راس المال على انه كل زيادة في راس المال ب 1% تزداد الانتاجية بقيمة Ek %