محاضرات الاقتصاد الجزئي -2- د. فتني مايا

المحاضرة 1: نظرية التكاليف والإيرادات

اولا- نظرية التكاليف:

يمكن تعريف التكاليف الاقتصادية بأنها عبارة عن مجموع المدفوعات النقدية التي تنفقها المؤسسة على العناصر الإنتاجية اللازمة لإنتاج سلعتها أو مجموع السلع المخطط لها خلال فترة زمنية معينة. وهناك العديد من التقسيمات للتكاليف نذكر منها على سبيل المثال التكاليف في الأجل القصير والتكاليف في الأجل الطويل، التكاليف الظاهرة والتكاليف الضمنية، التكاليف الاقتصادية والتكاليف المحاسبية...

1-دالة التكاليف في المدى القصير:

تمثل الفترة القصيرة الفترة الزمنية التي تكون قصيرة بالحد الذي لا يسمح لجميع عناصر الإنتاج بالتغير، بالتالي فإن عناصر الإنتاج يمكن تقسيمها إلى عناصر إنتاج ثابتة وعناصر إنتاج متغيرة، وهنا تصبح التكاليف الكلية مكونة من : تكاليف ثابتة وتكاليف متغيرة.

وتمثل دالة التكلفة العلاقة الرياضية بين حجم التكاليف وحجم الإنتاج المحقق عن طريق إنفاق هذه التكاليف،

ويمكن كتابتها على الشكل الآتي: $CT = f(x)$

1-1-التكاليف الكلية في الأجل القصير

أ- التكاليف الثابتة

يقصد بالتكاليف الثابتة التكاليف التي تتحملها المنشأة بغض النظر عن حجم الإنتاج، فهي ثابتة لا تتغير مهما تغير مستوى الإنتاج، وتتحملها المنشأة حتى إذا لم تنتج أي وحدة. السلعة. من ومن أمثلتها إيجار المباني والمعدات والآلات المستخدمة في النشاط الإنتاجي، أقساط التأمين فوائد القروض ... إلخ. وبيانيا فإن منحنى التكاليف الثابتة عبارة عن خط مستقيم موازي للمحور الأفقي، معادلته. من الشكل:

$$CFT: y = a$$

ب- التكاليف المتغيرة

وهي التكاليف التي تتغير تبعا لتغير حجم الإنتاج، حيث تزداد بزيادة الإنتاج وتنخفض بانخفاضه، وتكون مساوية للصفر عندما يكون مستوى الإنتاج صفرا ومن أمثلة التكاليف المتغيرة تكاليف عمال الإنتاج، تكاليف المواد الخام، تكاليف الطاقة إلخ. وعليه فدالة التكاليف المتغيرة هي دالة متزايدة لحجم الانتاج $CVT = f(x)$ومنحناها لا يأخذ شكل خطي حيث ينطلق من نقطة الأصل إلى أعلى اليمين، ورياضيا معادلته . من الشكل:

$$CVT: y = bx - cx^2 + dx^3$$

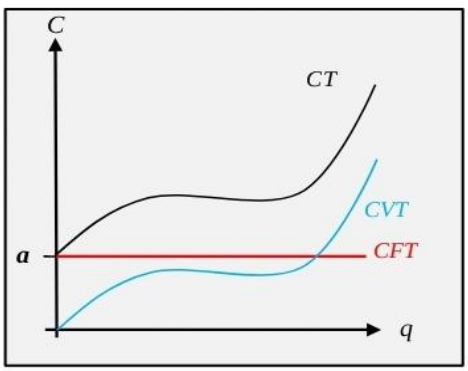
ت- التكاليف الكلية

تعبر التكاليف الكلية عن الأعباء التي تتحمله المؤسسة من أجل تحقيق أهدافها الإنتاجية، وهي عبارة عن مجموع التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة $(CT = CFT + CVT)$. وتكون التكاليف الكلية مساوية للتكاليف الثابتة عندما يكون حجم الإنتاج مساويا للصفر، وتزداد تبعا لزيادة الإنتاج نتيجة زيادة التكاليف المتغيرة. وبيانيا فإن منحنى التكاليف الكلية يأخذ شكل منحنى التكاليف المتغيرة، إلا أنه يقع فوقه بمقدار التكاليف الثابتة، أي أنه لا ينطلق من نقطة الأصل وإنما يبدأ من النقطة (a) التي تمثل التكاليف الثابتة ورياضيا تأخذ التكاليف الكلية شكل المعادلة الآتي:

$$CT: y = a + bx - cx^2 + dx^3$$

ويمكن توضيح منحنيات مختلف التكاليف الكلية بيانيا في الشكل الآتي:

التكاليف الكلية CT، الثابتةCFT والمتغيرةCVT



2-1- تكاليف الوحدة

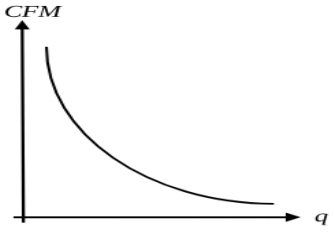
تعبر تكاليف الوحدة عن نصيب الوحدة الواحدة المنتجة من التكاليف سواء كانت التكاليف ثابتة أومتغيرة أو كلية، وعليه يمكن تقسيمها إلى :

أ- **متوسط التكاليف الثابتة**

يمثل متوسط التكاليف الثابتة نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف الثابتة الكلية، ورياضيا هو عبارة عن حاصل قسمة التكاليف الثابتة على عدد الوحدات المنتجة.

$$CFM = \frac{CFT}{x} \dots\dots \text{متوسط التكاليف الثابتة} = \frac{\text{التكاليف الثابتة الكلية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$$

وبيانيا، يأخذ محنى متوسط التكاليف الثابتة الشكل الآتي:

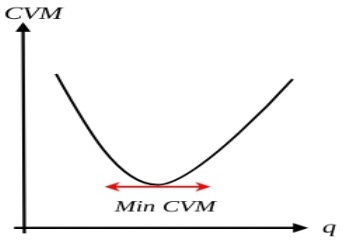


ب- **متوسط التكاليف المتغيرة**

يمثل متوسط التكاليف الثابتة نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف المتغيرة الكلية، ورياضيا هو عبارة عن حاصل قسمة التكاليف المتغيرة على عدد الوحدات المنتجة.

$$CVM = \frac{CVT}{x} \dots\dots \text{متوسط التكاليف المتغيرة} = \frac{\text{التكاليف المتغيرة الكلية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$$

ويأخذ منحنى متوسط التكاليف المتغيرة بيانيا شكل الحرف U على النحو الآتي:

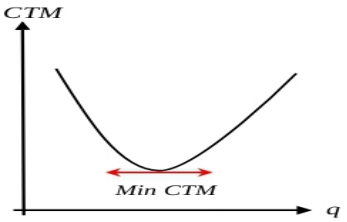


ت- **متوسط التكاليف الكلية**

يمثل متوسط التكاليف الكلية نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف الكلية ورياضيا هي عبارة عن حاصل قسمة التكاليف الكلية على عدد الوحدات المنتجة، وهو في نفس الوقت مجموع متوسط التكاليف الثابتة ومتوسط التكاليف المتغيرة $(CTM = CFM + CVM)$

$$CTM = \frac{CT}{x} \dots\dots \text{متوسط التكاليف الكلية} = \frac{\text{التكاليف الكلية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$$

وبيانيا، فإن منحنى التكاليف الكلية يأخذ نفس شكل منحنى متوسط التكاليف المتغيرة.

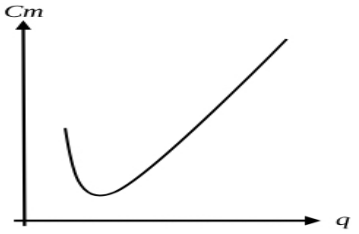


ث- **التكلفة الحدية**

تمثل التكلفة الحدية التكلفة الإضافية التي تتحملها المؤسسة نتيجة إنتاج وحدة إضافية واحدة، أو هي عبارة عن تكلفة آخر وحدة منتجة. ويمكن التعبير عن التكلفة الحدية بالعلاقة الرياضية الآتية:

$$Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta x} \dots\dots \frac{\text{التغير في التكاليف الكلية}}{\text{التغير في عدد الوحدات المنتجة}} = \text{التكلفة الحدية}$$

ويأخذ منحنى التكلفة الحدية بيانيا الشكل الآتي:



و من أجل توضيح العلاقة بين مختلف التكاليف في الفترة القصيرة نقترض الجدول الآتي:

وحدات الإنتاج(x)	التكاليف الكلية			التكاليف المتوسطة			التكلفة الحدية Cmg
	التكاليف الثابتة CFT	التكاليف المتغيرة CVT	التكاليف الكلية CT	متوسط التكاليف الثابتة CFM	متوسط التكاليف المتغيرة CVM	متوسط التكاليف الكلية CTM	
0	150	0	150	-	-	-	-
1	150	50	200	150	50	200	50
2	150	75	225	75	37.5	112.5	25
3	150	105	255	50	35	85	30
4	150	145	295	37.5	36.2	73.7	40
5	150	200	350	30	40	70	55
6	150	270	420	25	45	70	70
7	150	360	510	21.4	51.4	72.8	90
8	150	475	625	18.7	59.3	78	115
9	150	620	770	16.6	68.8	85.4	145
10	150	800	950	15	80	95	180

ويوضح الجدول أن :

-التكاليف الثابتة مستقلة عن حجم الإنتاج ويتحملها المنتج حتى ولو كانت الكمية المنتجة مساوية للصفر.

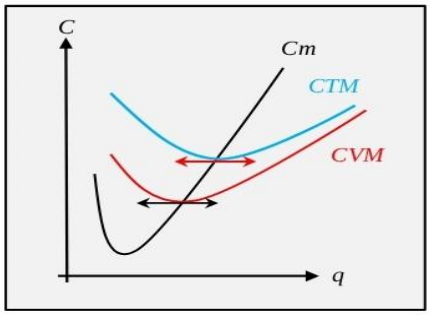
–التكاليف المتغيرة تزداد بزيادة الوحدات المنتجة، ذلك أن الزيادة في حجم الإنتاج تتطلب الزيادة في معدلات شراء عناصر الإنتاج، ما يعني الزيادة في تكاليف الإنتاج المتغيرة.

- التكاليف الكلية وهي إجمالي التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة، وهي دالة متزايدة لحجم الإنتاج نظرا لتزايد التكاليف المتغيرة، وتكون التكلفة الكلية مساوية للتكاليف الثابتة عندما تكون الكمية المنتجة مساوية للصفر.

-متوسط التكاليف الثابتة هو دالة متناقصة في الإنتاج الكلي، ذلك أن زيادة الإنتاج تسمح بتوزيع التكاليف الثابتة على عدد متزايد من الوحدات المنتجة، مما يؤدي إلى تناقص التكلفة الثابتة للوحدة المنتجة مع تزايد الإنتاج.

- تأخذ منحنيات CTM و CVM و Cmg شكل الحرف U ، وذلك لتأثير تزايد ثم تناقص الإنتاجية الحدية لعنصر الإنتاج المتغير (تناقص الغلة). إذ ومع تزايد الإنتاج في مراحله المبكرة يؤدي تزايد إنتاجية عنصر الإنتاج المتغير إلى تناقص متوسط التكاليف الثابتة (CFM) فيتناقص متوسط التكاليف الكلية (CTM). ولكن عندما يبدأ تناقص الإنتاجية الحدية (تناقص الغلة)، فإن ذلك يؤثر على التكلفة الحدية التي تبدأ هي الأخرى في التزايد ويؤدي ذلك في النهاية إلى تزايد كل من متوسط التكلفة المتغيرة (CVM) ومتوسط التكلفة الكلية(CTM).

وفي الشكل الموالي توضيح للتمثيل البياني لمتوسطات التكاليف والتكلفة الحدية في الفترة القصيرة:



- كلما زادت عدد الوحدات المنتجة كلما اقترب منحنى CVM من منحنى CTM، ذلك أن الفرق بين متوسط التكلفة المتغيرة ومتوسط التكلفة الكلية هو متوسط التكلفة الثابتة (CFM) الذي يتناقص مع زيادة الإنتاج.

-يقطع منحنى التكلفة الحدية كل من منحنى متوسط التكلفة المتغيرة ومنحنى متوسط التكلفة الكلية عند نقطة النهاية الصغرى لكل منهما. وطالما كانت التكلفة الحدية أقل من متوسط التكاليف الكلية ومتوسط التكاليف المتغيرة فإن زيادة الإنتاج تؤدي إلى انخفاض تكلفة الوحدة الواحدة المنتجة (تناقص كل من CTM و CVM)، في حين ترتفع تكلفة الوحدة الواحدة المنتجة (الكلية والمتغيرة) إذا كان منحنى التكلفة الحدية أعلى من متوسط التكاليف الكلية و متوسط التكاليف المتغيرة.

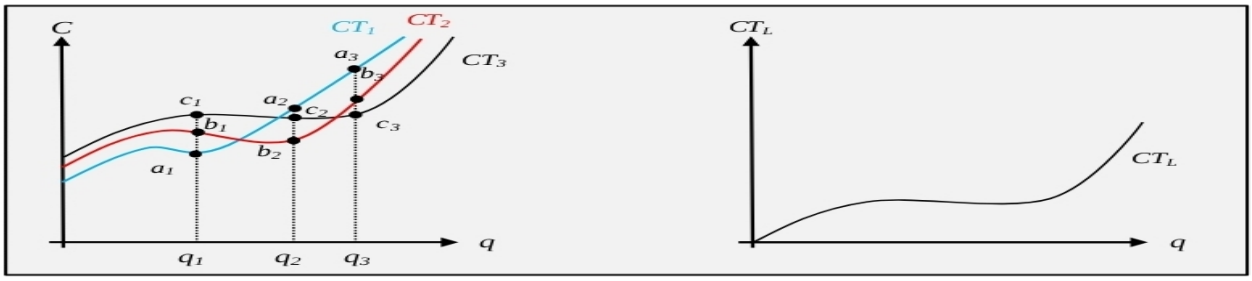
2- دالة التكاليف في المدى الطويل:

في الفترة الطويلة تستطيع المشروعات الإنتاجية أن تغير حجم إنتاجها عن طريق تغيير جميع الكميات المستخدمة من عناصر الإنتاج، ولذا تصبح كافة عناصر الإنتاج متغيرة، وبالتالي تكون تكاليف الإنتاج بأكملها تكاليفا متغيرة. وتكون دالة التكاليف في الفترة الطويلة نابعة من نقطة الأصل مما يدل على عدم وجود تكاليف ثابتة. وتشبه دالة التكاليف الكلية في الفترة الطويلة في سلوكها دالة التكاليف المتغيرة في الفترة القصيرة.

2-1- التكاليف الكلية في الأجل الطويل:

يمثل منحنى التكاليف الكلية في الفترة الطويلة شكل غلاف لمنحنيات التكاليف الكلية في الفترة القصيرة، حيث يوضح الشكل أسفله أن المنتج يختار دائما أقل تكلفة كلما أراد تغيير حجم الإنتاج، فإذا أراد إنتاج الكمية x_1 فإنه سوف يختار المشروع الأول لأنه يسمح له بالحصول على هذه الكمية بأقل تكلفة، وعليه فإن النقطة (a_1)ستكون واقعة على منحنى التكلفة في الفترة القصيرة ومنحنى التكلفة في الفترة الطويلة في نفس الوقت. وإذا أراد المنتج رفع حجم الإنتاج إلى x_2فإن الإبقاء على القدرة الإنتاجية الأول سوف يحقق هذه الكمية بتكلفة أعلى (a_2)، لذلك سينتقل المنتج للمشروع الثاني التي تسمح قدرته الإنتاجية بإنتاج الكمية x_2بتكلفة (b_2) أقل من تكلفة المشروع الأول. وينتقل المنتج للمشروع الثالث في حالة ما إذا أراد رفع الإنتاج إلى x_3لأن القدرة الإنتاجية للمشروع الثالث تسمح بتحقيق هذه الكمية بأقل تكلفة مقارنة بالمشروعين الأول والثاني.

وعليه؛ فإن النقاط a_1 ، b_2 ، c_3 التي تمثل أقل تكلفة لإنتاج مستويات مختلفة من الناتج وهي نقاط واقعة على التكاليف الكلية في الفترة الطويلة وكل منها يدل على حجم مختلف للمشروع.

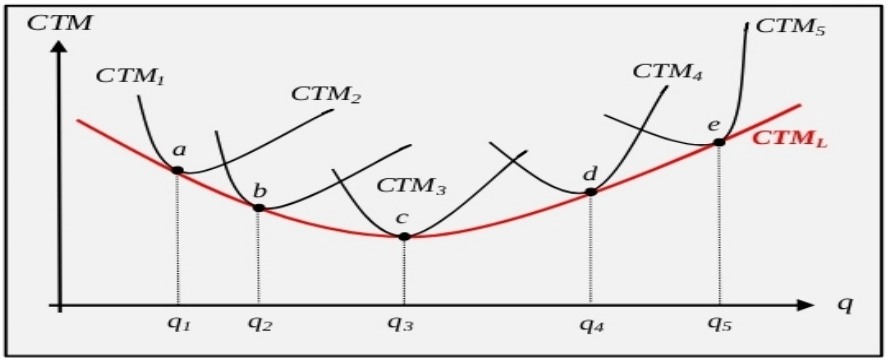


2-2- التكلفة المتوسطة في الأجل الطويل

يقصد بالتكلفة المتوسطة في الأجل الطويل نصيب الوحدة الواحدة المنتجة من التكاليف الكلية. ويأخذ منحنى التكلفة المتوسطة في الفترة الطويلة شكل حرف U مثل منحنى متوسط التكلفة في الفترة القصيرة، ولكنه يكون أكثر إنفراجا منه وفي المراحل الأولى نجد أن المؤسسة تستفيد من وفورات الإنتاج الكبير أي مرحلة تزايد الغلة، ما يؤدي إلى تناقص التكاليف المتوسطة مع زيادة حجم الإنتاج، وعندما تصل المؤسسة للحجم الأمثل تصل التكلفة المتوسطة إلى أدنى مستوى بعدها أي زيادة في حجم المؤسسة ستؤدي إلى زيادة التكاليف المتوسطة، بسبب الوفورات السلبية، ومرحلة تناقص الغلة التي تقترن بارتفاع التكاليف المتوسطة.

ولتوضيح تحليل التكاليف المتوسطة في الأجل الطويل نفترض أن المؤسسة تتوفر على القدرة الكافية لإقامة خمسة (5) أحجام للطاقة الإنتاجية، وأن منحنيات متوسط التكاليف في الفترة القصيرة تمثل هذه الأحجام كما يوضحها الشكل الآتي:

منحنى التكاليف المتوسطة في الأجل الطويل CTM_L

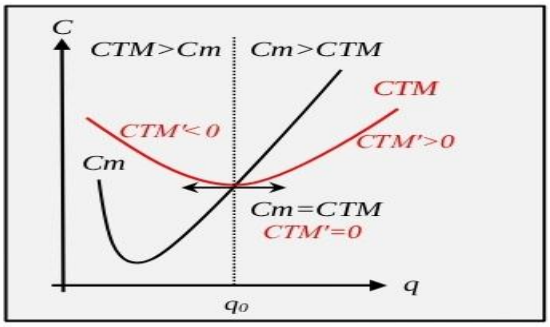


ما يلاحظ على الشكل أن للمنشأة حرية الاختيار بين ما يتوفر من مقترحات مختلفة، ويعتمد ذلك بشكل أساسي على الطاقة الإنتاجية التي ترغب المؤسسة بإنتاجها، ومما لا شك فيه ان المؤسسة ترغب دائما أن يتم ذلك عند أقل تكلفة ممكنة. فلو اختارت البدء بعملية الإنتاج عند الحجم الأول لإنتاج الكمية x_1فإن متوسط التكاليف سيكون عند النقطة (a) التي تمثل أدنى تكلفة، بينما نجد أنه عند اتخاذ المؤسسة القرار ببدء المشروع عند الحجم الثاني ستحقق الكمية x_1بتكلفة أعلى، لذا يكون القرار السليم بدء العملية الإنتاجية بالحجم الأول. أما إذا أرادت المؤسسة رفع حجم الإنتاج إلى x_2نجد أن القرار السليم هو الانتقال للحجم الثاني لأنه يعطي أقل تكلفة (b) مقارنة بالتكلفة المرتفعة التي تتحملها المؤسسة لإنتاج الكمية x_2 لو أبقت على الحجم الأول. وهكذا كلما أرادت المؤسسة رفع الإنتاج تختار القدرة الإنتاجية التي تحقق لها أقل تكلفة، وعليه فإن منحنى التكاليف المتوسطة في الأجل الطويل سيتكون من الأجزاء السفلية المتصلة من منحنيات التكاليف المتوسطة قصيرة الأجل، أي أنه يمثل منحنى غلاف يحيط بالمنحنيات الخاصة بالتكاليف المتوسطة في الأجل القصير.

2-3- التكلفة الحدية في الأجل الطويل

تعبر التكلفة الحدية طويلة الأجل عن مقدار التغير في التكاليف الكلية نتيجة التغير في الإنتاج بمقدار وحدة واحدة، بمعنى أن مفهوم التكاليف الحدية طويلة الأجل لا يختلف عن المفهوم قصير الأجل. كما أن منحنى التكلفة الحدية في الأجل الطويل يقطع منحنى التكاليف المتوسطة طويلة الأجل نقطته الدنيا والتي تمثل مستوى الإنتاج الأمثل.

والشكل الآتي يوضح العلاقة بين منحنى التكلفة الحدية ومنحنى متوسط التكاليف.



ويمكن توضيح العلاقة بين التكلفة الحدية ومتوسط التكلفة الكلية رياضيا من خلال ما يلي:

$$CTM = \frac{CT}{x}$$

$$CT = CTM \times x$$

$$\frac{d(CT)}{d(x)} = \frac{\partial(CTM)}{\partial(x)}.x + \frac{\partial(x)}{\partial(x)}.CTM$$

$$\boldsymbol{Cmg = \frac{\partial(CTM)}{\partial(x)}.x + .TCM}$$

ومنه:

$CTM > Cmg \leftarrow 0 > \frac{\partial(CTM)}{\partial(x)}$ التوسع في الإنتاج يؤدي إلى انخفاض تكلفة الوحدة الواحدة.

$CTM < Cmg \leftarrow 0 < \frac{\partial(CTM)}{\partial(x)}$ التوسع في الإنتاج يؤدي إلى ارتفاع تكلفة الوحدة الواحدة.

$CTM = Cmg \leftarrow 0 = \frac{\partial(CTM)}{\partial(x)}$ أدنى تكلفة للوحدة الواحدة (مستوى الإنتاج الأمثل).

ثانيا- نظرية الإيرادات:

تعبر الإيرادات عن قيمة ما يحصل عليه المنتج نتيجة بيع منتجاته في السوق، أي أنها تمثل قيمة المبيعات وهناك ثلاثة مقاييس للإيرادات :

1- **الإيراد الكلي:** هو إجمالي المبالغ التي يحصل عليها المشروع نتيجة بيعه لعدد معين من الوحدات المنتجة.

الإيراد الكلي= الكمية المنتجة × ثمن الوحدة..... $RT = P_x . x$

2- **الإيراد المتوسط :** هو نصيب الوحدة المنتجة من الإيرادات، أي حاصل قسمة الإيرادات الكلية على عدد الوحدات المنتجة، ولما كان الإيراد الكلي هو عبارة عن حاصل ضرب والكمية المنتجة وثمن الوحدة، فهذا يعني أن الإيراد المتوسط يساوي الثمن .

$$RM = \frac{RT}{x} \ldots . \rightarrow RM = P_x$$

3- **الإيراد الحدي:** هو عبارة عن إيراد الوحدة الأخيرة المباعة من سلعة ما، أو هو ازدياد الإيراد الكلي، الناجم عن بيع وحدة إضافية من الناتج ورياضيا فإن الإيراد الحدي هو حاصل قسمة التغير في الإيراد الكلي على التغير في عدد الوحدات المنتجة، أما إذا كانت لدينا دالة للإيراد الكلي فالإيراد الحدي هنا عبارة عن المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي.

$$Rmg = \frac{\Delta RT}{\Delta x} \ldots . \rightarrow Rmg = \frac{\Delta RT}{dx}$$

وإذا افترضنا أن سعر السلعة x قد تحدد في السوق بناء على العرض والطلب (سوق المنافسة التامة) فكان مساويا لـ 12 (P=12). هنا يصبح الإيراد الكلي مساويا لـ:

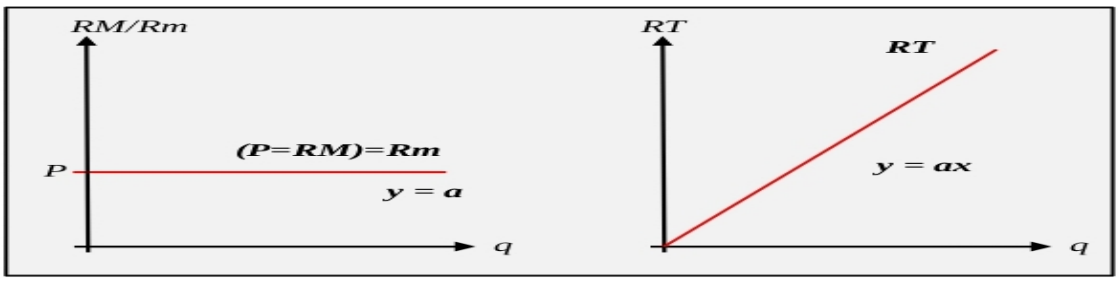
الإيراد الكلي: $\boldsymbol{RT = P_x . x = 12x}$

الإيراد المتوسط: $\boldsymbol{RM = RT/x = 12x/x = 12}$

الإيراد الحدي: $\boldsymbol{Rmg = RT' = 12}$

والملاحظ أنه في سوق المنافسة التامة يكون السعر مساويا للإيراد المتوسط ومساويا للإيراد الحدي: P=RM=Rmg وعليه فإن منحنيات الإيراد تأخذ الشكل الآتي:

منحنيات الإيراد (الكلي، المتوسط والحدي)



ثالثا- تعظيم الربح:

بناء على تحليل التكاليف والإيرادات يصبح هدف المنتج هو تعظيم الربح، أي تحقيق أكبر فرق ما بين الإيرادات التي يحققها والتكاليف التي يتحملها.

$$\pi = RT - CT$$

ويصل المنتج إلى أعظم ربح إذا تحقق الشرطين التاليين:

1) الشرط الضروري: المشتقة الأولى لدالة الربح مساوية للصفر

ذلك أنه عندما تكون دالة الربح في حدها الأقصى (نهايتها العظمى) يكون المستقيم مماس لمنحنى الربح في هذه النهاية مواز تماما للمحور الأفقي (الميل = 0)، لذا يجب أن تكون المشتقة الأولى (التي تمثل الميل) مساوية للصفر.

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 0 => \frac{\partial \mathrm{RT}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{CT}}{\partial \mathrm{x}} = 0$$
$$=> \frac{\partial \mathrm{RT}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{CT}}{\partial \mathrm{x}}$$
$$=> \mathrm{Rmg} = \mathrm{Cmg}$$

ومعنى الشرط الأول من تعظيم الربح بأن المنتج يستطيع زيادة ربحه باستمرار طالما كان الإيراد الحدي أكبر من التكلفة الحدية، ويصل المنتج إلى أعظم ربح عندما تصبح قيمة الإيراد الحدي مساوية للتكلفة الحدية.

2) الشرط الكافي : المشتقة الثانية لدالة الربح أقل من الصفر

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0 => \frac{\partial^2 \mathrm{RT}}{\partial \mathrm{x}^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{CT}}{\partial \mathrm{x}^2} < 0$$
$$=> \mathrm{RT}'' - \mathrm{CT}'' < 0 =>$$

وبما أن دالة الإيراد الكلي من الدرجة الأولى فهذا يعني أ أن المشتقة الثانية لها تكون مساوية للصفر **(RT"=0)**. وعليه يصبح الشرط الثاني:

$$=> -\mathrm{CT}'' < 0 =>$$
$$=> \mathrm{CT}'' > 0 =>$$

ومعنى الشرط الثاني $(CT'' = Cm'' > 0)$ من تعظيم الربح أنه يجب أن يكون منحنى التكلفة الحدية عند الكمية التي تعظم ربح المنتج موجب الميل (متصاعد).

ملاحظة: تنطبق شروط تعظيم الربح على دالة التكلفة في الأجلين القصير الطويل (في سوق المنافسة التامة).

مثال:

يقوم منتج بإنتاج السلعة x وفقا لدالة التكلفة الآتية: $CT = 1/3x^3 - 6x^2 + 40x + 20$

فإذا علمت أن سعر x السائد في السوق (سعر بيع الوحدة الواحدة من المنتوج) هو : Px=29

المطلوب :

1- استخراج جميع دوال التكلفة ودوال مختلف الإيرادات.

2- تعظيم ربح هذا المنتج.

الحل:

<u>1-استخراج جميع دوال التكلفة ودوال مختلف الإيرادات.</u>

التكلفة الكلية الثابتةCFT=20	متوسط التكلفة الثابتة: $CFM = CFT/x = 20/x$
التكلفة الكلية المتغيرة$CVT = 1/3x^3 - 6x^2 + 40x$	متوسط التكلفة المتغيرة: $CVM = CVT/x = 1/3^2 - 6x + 40$
التكلفة الحدية:$Cm = CT' = x^2 - 12x + 40$	متوسط التكلفة الكلية: $CTM = CT/x = 1/3x^2 - 6x + 40(20/x)$
السعر: Px=29	الإيراد الكلي: $RT = Px.x = 29x$
الإيراد المتوسط: $RM = RT/x = 29$	الإيراد الحدي: $Rmg = RT' = 29$

<u>2- تعظيم الربح</u>

الشرط الأول : Rmg=Cmg

$$Rmg = Cmg \Rightarrow 29 = x^2 - 12x + 40 \Rightarrow x^2 - 12x + 11 = 0$$
$$\Delta = b2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (12)2 - 4(1)(11) \Rightarrow \Delta = 100$$
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12 - \sqrt{100}}{2(1)} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12 + \sqrt{100}}{2(1)} = 11 \end{cases}$$
$$(x_1 = 1, x_2 = 11)$$

الشرط الثاني: CT">0

$$CT'' = 2x - 12 => \begin{cases} x_1 = 1 => CT'' = -10 < 0 \text{ مرفوض} \\ x_2 = 11 => CT'' = 10 > 0 \text{ مقبول} \end{cases}$$

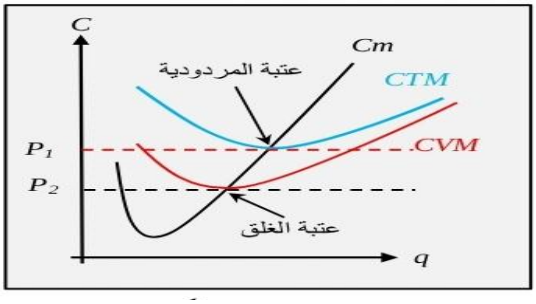
وعلية فالكمية التي تعظم ربح هذا المنتج هي: x=11

$$CT = 1/3(11)^3 - 6(11)^2 + 40(11) + 20 = 177.66$$
$$RT = 29(12) = 319$$
$$\pi = RT - CT = 319 - 177.66 = 141.31$$

رابعا- عتبة المردودية وعتبة الاغلاق:

يطلق على السعر الذي يقابل النقطة الدنيا لمنحنى متوسط التكاليف الكلية (**Min CTM**) بعتبة المردودية، وعليه فالسعر عندما يكون مساويا لمتوسط التكاليف الكلية (**Px=CTM**) يكون ربح المنتج معدوما، ويطلق على هذا السعر بعتبة المردودية. وإذا ما ارتفع سعر البيع عن عتبة المردودية يحقق المنتج ربح اقتصادي، أما إذا انخفض السعر عن هذه العتبة فسوف يتحمل المنتج خسارة، أي أن عتبة المردودية عبارة نقطة التعادل التي تتساوى عندها التكاليف مع الإيرادات.

عتبة المردودية وعتبة الاغلاق



أما السعر الذي يقابل النقطة الدنيا لمنحنى متوسط التكاليف المتغيرة (Min CVM) فيطلق عليه بعتبة الاغلاق. وعندما يكون السعر مساويا لمتوسط التكاليف المتغيرة (Px=CVM) فهذا يعني أن المنتج قد غطى جميع التكاليف المتغيرة وخسر كل التكاليف الثابتة، ويمثل مقدار التكاليف الثابتة أكبر خسارة يمكن أن يتحملها المنتج
(في الفترة القصيرة) ويستمر في الإنتاج، ولهذا يمكن القول:

$Px \geq CVM$: يستمر المنتج في الإنتاج.

$Px < CVM$: يتوقف المنتج عن الإنتاج.

-ملاحظة: تتعلق عتبة المردودية وعتبة الاغلاق بتحليل دالة التكاليف في الفترة القصيرة، أما الفترة الطويلة فلا تحتوي إلا على مصطلح عتبة المردودية باعتبار أن جميع التكاليف فيها تكون متغيرة، أي أن المنتج في الفترة الطويلة يتوقف عن الإنتاج مباشرة إذا حقق خسارة، أي إذا انخفض السعر عن متوسط التكاليف.

مثال :

بالاحتفاظ بدالة التكلفة السابقة: $CT = 1/3x^3 - 6x^2 + 40x + 20$

المطلوب : تحديد عتبة الاغلاق.

الحل:

لدينا عتبة الاغلاق هي عبارة عن السعر المقابل للنقطة الدنيا لمتوسط التكاليف المتغيرة (Px=Min CVM)

-التكاليف الكلية المتغيرة: $CVT = 1/3x^3 - 6x^2 + 40x$

متوسط التكاليف المتغيرة : $CVM = (CVT/x) = 1/3x^2 - 6x + 40$

عند النقطة الدنيا لمتوسط التكاليف المتغيرة تكون المشتقة الأولى للدالة مساوية للصفر (CVM'=0)

$$CVM' = 0 => 2/3x - 6 = 0$$
$$=> x = 18/2$$
$$=> x = 9$$

إن الكمية (x=9) تمثل الكمية المقابلة للنقطة الدنيا لمتوسط التكاليف المتغيرة وبتعويض هذه الكمية في دالةCVM نحصل على سعر عتبة الغلق.

$$CVM = 1/3(9)^2 - 6(9) + 40$$
$$CVM = 13$$

وعليه أدنى سعر يمكن أن يقبل به المنتج لبيع سلعته هو Px=13 أي:

P > 13 : يستمر المنتج في الإنتاج.

p < 13 : يتوقف المنتج عن الإنتاج.

Summary

Costs: refer to the monetary value of goods and services used in the production of other goods and services; they are expressed in terms of amount of money that a business or individual must spend to acquire a good .costs can be classified into different categories such as:

Fixed costs: there are costs that do not change with the level of production or output. Examples; salaries and insurance

Variable costs: there are costs that change with the level of production, examples cost of raw materials, labor; or energy.

Total cost: is the sum of its fixed and variables costs.

Revenues: refers to the total amount of income generated by a business through the sale of its products or services, its represents the monetary inflows associated with the normal operations of a business and is often referred to as the *top line* on an income statement.

Profit: also known as net income refers to the financial gain realized by a business after accounting for all expenses and costs incurred during a specific period. It represents the bottom line of an income statement and signifies the overall success or failure of a business's operations.

Profit= revenue-expenses

The profitability threshold is the turnover (called the break-even turnover) through which the institution achieves neither profit nor loss; it's the level of necessary activity through which the institution achieves a null result. Before reaching this level, the institution is in a state of loss, and after exceeding it, intervention the enterprise is in a profit zone:

Closing threshold: is the point which the institution achieves loss; it's the level of necessary activity through which the institution achieves bankruptcy. Before reaching this level, the institution is in a state of loss, and after exceeding it, intervention the enterprise is in an out market.