2. نموذج الانحدار البسيط (The simple regression model)

يهدف هذا الفصل بالأساس إلى إيضاح كيفية تقدير نموذج الانحدار البسيط (الخطي وغير الخطي) الذي يتكون من متغير تابع ومتغير مستقل واحد.

ولتحقيق هذا الهدف، ينقسم هذا الفصل إلى ثمانية نقاط: أولها تحديد نموذج الانحدار الخطي البسيط. وثانيها افتراضات نموذج الانحدار الخطي البسيط. وثالثها تقدير معاملات انحدار النموذج الخطي البسيط. ورابعها تقدير التباين والخطأ المعياري للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطي البسيط. وخامسها تقدير معامل التحديد البسيط (r^2). وسادسها تقدير معامل الارتباط البسيط (r). وسابعها خصائص القيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطي البسيط. وثامنها تقدير معاملات انحدار النموذج غير الخطي البسيط.

1.2. تحديد نموذج الانحدار الخطي البسيط

يمكن صياغة نموذج الانحدار الخطي البسيط كما يلي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

$$(i = 1,2, \dots, N)$$

حيث أن:

Y: القيمة الفعلية للمتغير التابع

X: القيمة الفعلية للمتغير المستقل

ε: القيمة الفعلية لحد الخطأ

β, α: القيمة الفعلية لمعاملات النموذج

N: عدد المشاهدات

- ويرجع وجود حد الخطأ إلى عدة أسباب منها:

1. إهمال بعض المتغيرات المستقلة – التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع – في النموذج؛
2. الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج، كأن تكون العلاقة غير خطية في حين أن الباحث اعتبرها خطية؛
3. حدوث خطأ في كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية، بحيث يكون هناك إهمال لخصوصيات الأفراد كل على حده؛
4. السلوك العشوائي للجنس البشري.

ويلاحظ أنه إذا كانت القيم الفعلية لــ $(\varepsilon, \beta, \alpha)$ معروفة من قبل، فليس هناك حاجة لاستخدام الاقتصاد القياسي. وحيث أن القيم الفعلية لــ $(\varepsilon, \beta, \alpha)$ نادرا ما تكون معروفة سلفا، فإنه يجب

تقديرها تقديرا جيدا، ويتم ذلك باستخدام **طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least Squares : OLS)**.

2.2. فروض نموذج الانحدار الخطي البسيط:

لكي يمكن استخدام طريقة (OLS) في تقدير المعادلة رقم (1.2)، يجب توافر الفروض (Assumptions) التالية:

- **الفرض الأول:** إن المتغير التابع يكون دالة خطية في المتغير المستقل مضافا إليه حد الخطأ. فمثلا إذا كان نموذج الانحدار المراد تقديره يأخذ الصيغة الأسية التالية:

$$Y_i = X_i^{\beta} \acute{e}^{\varepsilon_i}$$
$$(i = 1,2, \dots, N)$$

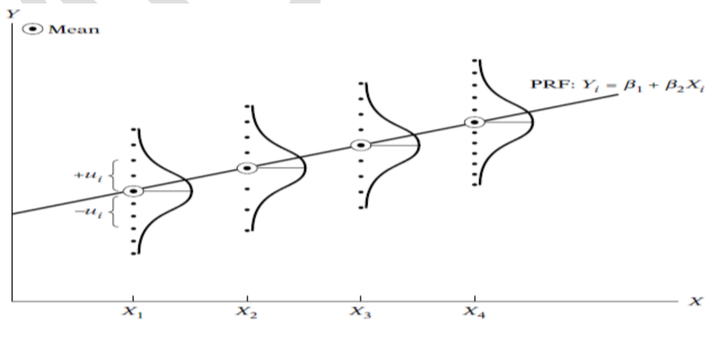
حيث أن $(\acute{e})$ عبارة عن أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي 2.71828 . فإنه لكي نحصل على تقدير جيد للمعادلة السابقة، يجب تحويل نموذج الانحدار السابق إلى نموذج الانحدار التالي:

$$lnY_i = \beta lnX_i + \varepsilon_i$$

- **الفرض الثاني:** إن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي (ε_i) وفي أي فترة زمنية تعتمد على الصدفة، وقد تكون هذه القيم سالبة أو موجبة أو مساوية للصفر.

- **الفرض الثالث:** إن القيمة المتوقعة لحد الخطأ تكون مساوية للصفر، أي: $E(\quad_i) = 0$، ويعني هذا أن الوسط الحسابي لحد الخطأ المصاحب لكل مستوى من X يساوي صفر، وإن المتغير X يكون ثابتا.
ويترتب عن إسقاط هذا الفرض، حدوث مشكلة تحيز الحد الثابت.

الشكل رقم (1.2): التوزيع الشرطي لحدود الأخطاء

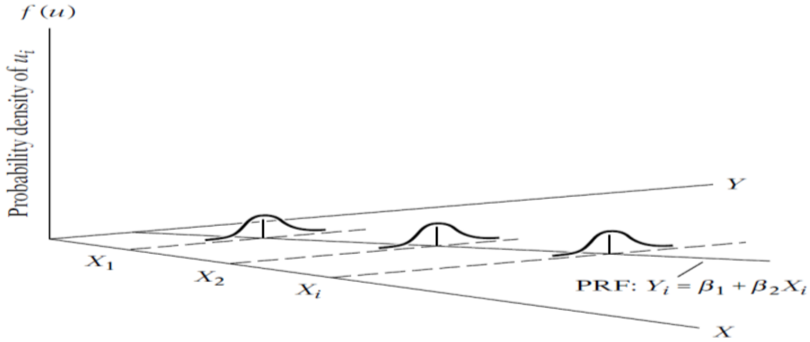


Source : D. Gujarati,D.C. Porter, Basic econometrics, 5th Ed, McGraw-Hill, USA, p. 63.

**PRF : Population Regression Function

- **الفرض الرابع:** إن تباين حد الخطأ يكون ثابتا. ومن ثم فإن حدود الأخطاء يكون لها نفس التباين (Homoscedasticity). أي: $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$. (أنظر الشكل: 2.2).

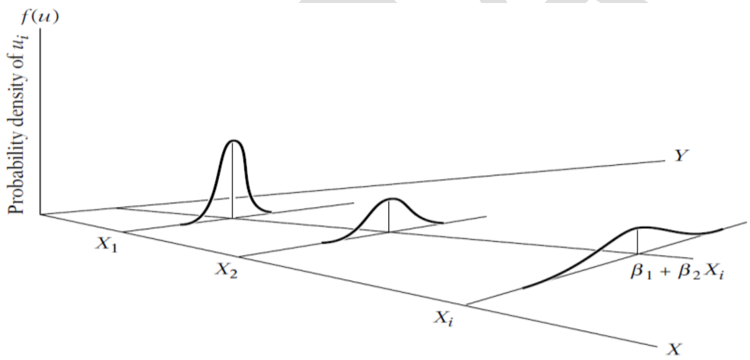
الشكل رقم (2.2): ثبات التباين (Homoscedasticity)



Source : D. Gujarati,D.C. Porter, Basic econometrics, 5th Ed, McGraw-Hill, USA, p. 63.

ويترتب عن اسقاط هذا الفرض، حدوث مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ (Heteroscedasticity)، أي أن حدود الخطأ ليس لها نفس التباين (أنظر الشكل 3.2).

الشكل رقم (3.2): عدم ثبات التباين (Heteroscedasticity)



Source : D. Gujarati,D.C. Porter, Basic econometrics, 5th Ed, McGraw-Hill, USA, p. 63.

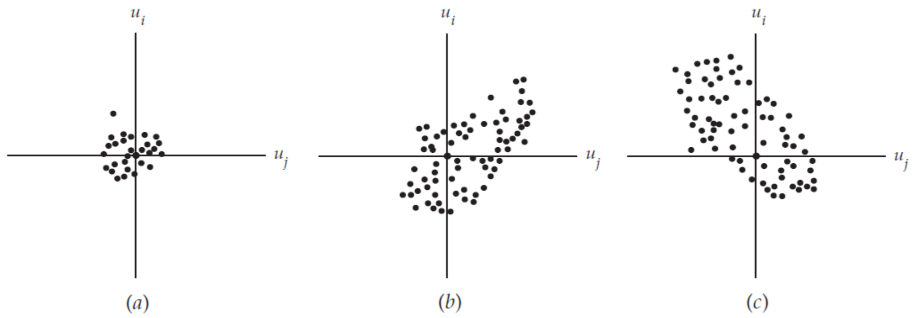
- **الفرض الخامس:** إن حد الخطأ لمشاهدة ما لا يرتبط بحد الخطأ في مشاهدة أخرى.

أي:

$Cov(\ _i, \varepsilon_j) = 0$ حيث أن : $i \neq j$.

ويترتب عن إسقاط هذا الفرض حدوث مشكلة الارتباط الذاتي (Autocorrelation problem).

الشكل رقم (4.2): أنماط الارتباط الذاتي: (a) عدم وجود ارتباط ذاتي، (b) ارتباط ذاتي موجب، (c) ارتباط ذاتي سالب



Source : D. Gujarati,D.C. Porter, Essentials of econometrics, 4th Ed, McGraw-Hill, USA, p. 56.

- **الفرض السادس:** إن حد الخطأ يكون مستقلا عن المتغير المستقل بالنسبة لكل مشاهدة. ويستلزم ذلك أن يكون التغاير (Cov) لكل من: $\varepsilon_i, \varepsilon_i$ معا مساويا للصفر.
  أي: $Cov(X_i, \varepsilon_i) = E(X_i, \varepsilon_i) = 0$
- **الفرض السابع:** إن حد الخطأ (ε_i) موزع توزيعا طبيعيا. أي أن توزيع (ε_i) حول متوسطها المساوي للصفر يكون متماثلا وذلك عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل (X_i) أي بشكل جرس. أي: $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
- **الفرض السابع:** إن درجات الحرية[1] $N - (k + 1)$ يجب أن تكون موجبة، أي يجب أن تكون: N > K+1

حيث أن:

N: عدد المشاهدات

k: عدد المتغيرات المستقلة

K+1: عدد معاملات الانحدار المقدرة

DF: درجات الحرية (Degrees of freedom)

3.2. تقدير معاملات انحدار النموذج الخطي البسيط

بفرض توافر الفروض السابق ذكرها، فإنه يمكن استخدام طريقة (OLS) في تقدير $(\varepsilon, \beta, \alpha)$. وبتطبيق هذه الطريقة على المعادلة رقم (1.2) ينتج ما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + e_i \dots \dots \dots (2.2)$$

$$(i = 1,2, \dots, N)$$

[1] درجات الحرية هي عدد القيم القابلة للتغير في حساب خاصية إحصائية ما. يعتمد حساب الخصائص الإحصائية المختلفة على مجموعة من المعلومات أو البيانات. يسمى عدد المعلومات المستقلة عن بعضها والتي تدخل في حساب خاصية إحصائية معينة (كالتباين Variance ، والارتباط Correlation ، ...الخ) بدرجات الحرية .بشكل عام، عدد درجات الحرية في تقييم خاصية إحصائية معينة يساوي عدد القراءات المستقلة التي تدخل في حساب الخاصية الإحصائية (تباين، ارتباط، ...) ناقص عدد الخصائص الإحصائية المستخدمة في حساب الخاصية الإحصائية المطلوبة (مثل استخدام قيمة المتوسط الحسابي في حساب التباين مثلا.

حيث أن:

$\hat{Y}$: القيمة المقدرة للمتغير التابع

$\hat{\beta}, \hat{\alpha}$: القيم المقدرة لمعاملات النموذج

e: القيمة المقدرة لحد الخطأ

ويتم تقدير $(\varepsilon, \beta, \alpha)$ على الترتيب كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \dots\dots\dots (3.2)$$

حيث أن:

$$x_i = X_i - \bar{X} \dots\dots\dots (4.2)$$

$$y_i = Y_i - \bar{Y} \dots\dots\dots (5.2)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} \dots\dots\dots (6.2)$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} \dots\dots\dots (7.2)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \dots\dots\dots (8.2)$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \dots\dots\dots (9.2)$$

$$= Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i$$

حيث أن:

$\bar{X}$: الوسط الحسابي لــ X

$\bar{Y}$: الوسط الحسابي لــ Y

4.2. تقدير التباين والخطأ المعياري للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطي البسيط

يمكن إيضاح كيفية تقدير التباين والخطأ المعياري للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطي البسيط على النحو التالي:

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2} \dots\dots\dots (10.2)$$

$$SE(\hat{\beta}) = \sqrt{Var(\hat{\beta})} \dots\dots\dots (11.2)$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum X_i^2}{N \sum x_i^2} \dots \dots \dots (12.2)$$

$$SE(\hat{\alpha}) = \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \dots \dots \dots (13.2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF} \dots \dots \dots (14.2)$$

حيث أن:

Var: التباين

SE: الخطأ المعياري

$\hat{\sigma}^2$: التباين المقدر لحد الخطأ

DF: درجات الحرية N-(k+1)

k: عدد المتغيرات المستقلة

K+1: عدد معاملات الانحدار المقدرة

5.2. تقدير معامل التحديد البسيط (The coefficient of determination):

يعرفه (Gujarati and Porter, 2010) كما يلي:

‘‘...r^2measures the proportion or percentage of the total variation in Y explained by the regression model.’’[2]

وعليه، فإن معامل التحديد البسيط (R^2) يقيس نسبة (%) التغير في المتغير التابع نتيجة تغير المتغير المستقل. وبعبارة أخرى، يوضح (R^2) نسبة مساهمة المتغير المستقل في التغير الحادث في المتغير التابع. ويتم استخدام (R^2) لقياس جودة توفيق (Goodness of fit) معادلة الانحدار المقدرة. وتقع قيمة (R^2) بين الصفر والواحد الصحيح. أي: $0 \leq R^2 \leq 1$. لاحظ أن قيمة (R^2) لا يمكن أن تكون سالبة.

- ومن ثم يمكن التمييز بين حالتين كما يلي:

- **إذا كانت $^2 = 1$:** فإن هناك علاقة معنوية تامة بين المتغير المستقل والمتغير التابع. ويعني ذلك أن *100%* من التغير في المتغير التابع *(Y)* يرجع إلى التغير في المتغير المستقل *(X)*. أي أنه ليس هناك متغيرات مستقلة أخرى خلاف X تؤثر على Y. لاحظ أنه كلما قربت قيمة (R^2) من الواحد الصحيح كلما زادت الثقة في التقدير.
- **إذا كانت $r^2 = 0$:** فليس هناك علاقة بين المتغير المستقل *(X)* والمتغير التابع *(Y)*.

- ويتم تقدير (R^2) كما يلي:

[2] D. Gujarati,D.C. Porter. (2010). Essentials of econometrics, 4th Ed, McGraw-Hill, USA, p. 73.

ننطلق من معادلة الانحدار الموالية:

$$y_i = \hat{y}_i + e_i \dots\dots\dots (15.2)$$

لنعبر عن المعادلة رقم (15.2) بطريقة مختلفة قليلا ولكن مكافئة لها كما يلي (أنظر الشكل (5.2):

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i) \dots\dots\dots (16.2)$$

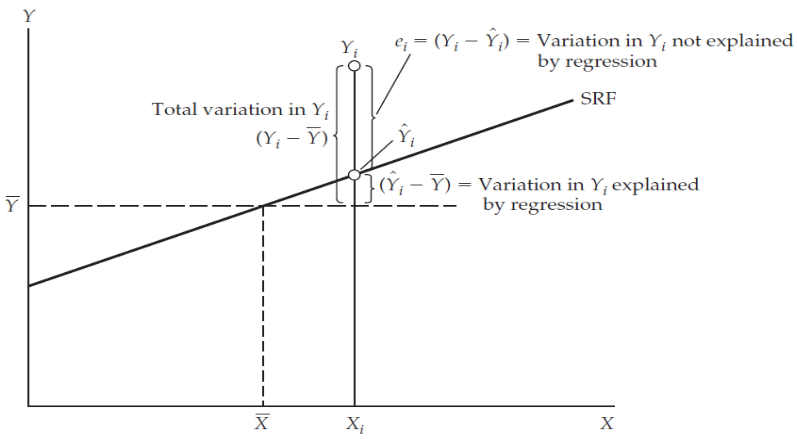
حيث أن:

$(y_i - \bar{y})$: الاختلاف الكلي في y_i.

$(\hat{y}_i - \bar{y})$: الاختلاف في y_i المفسر بمعادلة الانحدار.

$(y_i - \hat{y}_i)$: الاختلاف في y_i غير المفسر بمعادلة الانحدار.

الشكل (5.2): تجزئة التغير الكلي في y_i



Source : D. Gujarati,D.C. Porter. (2010). Essentials of econometrics, 4th Ed, McGraw-Hill, USA, p. 72.

*SRF : Sample Regression Function

بتجميع مربعات طرفي المعادلة رقم (16.2) نحصل على ما يلي:

$$\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 \dots\dots\dots (17.2)$$

بالتعبير عن المعادلة (17.2) بالرموز نحصل على:

$$TSS = ESS + RSS \dots\dots\dots (18.2)$$

بقسمة طرفي المعادلة رقم (18.2) على TSS نجد:

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} \dots\dots\dots (19.2)$$

نعرف (r^2) كما يلي:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$
$$= \frac{ESS}{TSS}$$
$$= 1 - \frac{RSS}{TSS}$$
$$= 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \dots\dots\dots (20.2)$$

أو يمكن حسابه كما يلي:

$$R^2 = \hat{\beta}^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}\right) \dots\dots\dots (21.2)$$

أو يمكن حسابه كما يلي:

$$R^2 = \hat{\beta}^2 \left(\frac{S_x^2}{S_y^2}\right) \dots\dots\dots (22.2)$$

حيث أن:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N-1}} \dots\dots\dots (23.2)$$
$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N-1}} \dots\dots\dots (24.2)$$

حيث أن:

RSS: مجموع مربعات الأخطاء (Residual Sum of Squares)

ESS: مجموع المربعات المفسر (Explained Sum of Squares)

TSS: مجموع المربعات الكلي TSS=RSS+ESS (Total Sum of Squares)

S_y, S_x: الانحراف المعياري لكل من X و Y على الترتيب

S_y^2, S_x^2: التباين لكل من X و Y على الترتيب

6.2. تقدير معامل الارتباط البسيط (r):

يقيس معامل الارتباط البسيط r قوة العلاقة الخطية (strength) بين متغيرين فقط. وتقع قيمة r بين 1- و 1+، أي: $-1 \leq r \leq +1$. ويمكن تقسيم مستويات قوة العلاقة الإرتباطية بين المتغيرات كما يوضحه الجدول الموالي:

Correlation Coefficient (r) Value	Indication
Between ± 0.8 to ± 1.0	High correlation
Between ± 0.6 to ± 0.79	Moderately high correlation
Between ± 0.4 to ± 0.59	Moderate correlation
Between ± 0.2 to ± 0.39	Low correlation
Between ± 0.1 to ± 0.19	Negligible correlation

ومن ثم يمكن التمييز بين ثلاثة حالات على النحو التالي:

- **إذا كانت $r = 1$:** فإن هناك علاقة خطية تامة موجبة بين المتغيرين محل الدراسة. ويعني ذلك أن الزيادة في قيم أحد المتغيرين سوف تترافق مع زيادة في قيم المتغير الآخر.
- **إذا كانت $r = -1$:** فإن هناك علاقة خطية تامة سالبة بين المتغيرين محل الدراسة. ويعني ذلك أن الزيادة في قيم أحد المتغيرين سوف تترافق مع انخفاض في قيم المتغير الآخر.
- **إذا كانت $r = 0$:** فليس هناك علاقة بين قيم المتغيرين محل الدراسة.

- **ملاحظة هامة:** العلاقة الإرتباطية (Caurrelation) لا تعني بالضرورة أن العلاقة سببية (Causality) بين المتغيرات كما هو الحال عند دراستنا لتحليل الانحدار.

ويتم تقدير r كما يلي:

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{S_x S_y} \dots\dots\dots (25.2)$$

أو:

$$r = \hat{\beta}\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}} \dots\dots\dots (26.2)$$

أو:

$$r = \hat{\beta}\left(\frac{S_x}{S_y}\right) \dots\dots\dots (27.2)$$

أو:

$$r = \pm\sqrt{R^2} \dots\dots\dots (28.2)$$

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum x_i y_i}{N-1} \dots\dots\dots (29.2)$$

حيث أن: R^2 عبارة عن مربع r ، Cov تعني التغاير (Covariance).

7.2. خصائص القيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطي البسيط:

استخدمت طريقة (OLS) في تقدير العلاقات الاقتصادية باعتبارها تعطي أفضل تقديرات خطية غير متحيزة (Best Linear Unbiased Estimators : BLUE). ويقودنا ذلك إلى معرفة المعايير للحكم على جودة هذه المقدرات (المعاملات). ونعرض فيما يلي خصائص هذه المقدرات:

1. **المقدرات خطية (Linear Estimators):** هذا يعني أن المقدرات دالة خطية في للمشاهدات الفعلية للمتغير التابع Yi . وللبرهنة على ذلك نتبع الخطوات التالية[3]:

باستحضار المعادلة (3.2) كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \ldots \ldots \ldots (3.2)$$

وبما أن: $y_i = Y_i - \bar{Y}$

إذن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - \frac{\bar{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2}$$

بما أن: $\sum x_i = 0$

$$\therefore \frac{\bar{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2} = 0$$

وأن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{\beta} = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} Y_i \ldots \ldots \ldots (30.2)$$

لنعتبر الكمية:

$$K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \sum K_i Y_i \ldots \ldots \ldots (31.2)$$

[3] مجيد علي حسين، عفاف عبد الجبار سعيد. (1998). الاقتصاد القياسي: النظرية والتطبيق، دار وائل، عمان، ص ص. 183-185.

حيث تشير المعادلة (31.2) إلى أن المعامل ̂ هو دالة خطية لقيم المتغير التابع Yi. أي أن:

$$\hat{\beta} = \sum K_i Y_i$$

$$= K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + K_3 Y_3 + \cdots + K_N Y_N$$

وبإتباع نفس الأسلوب يمكن البرهنة على خاصية الخطية للمعامل $(\hat{\alpha})$، أي الحد الثابت كما يلي:

باستحضار المعادلة (8.2) كما يلي:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \ldots\ldots\ldots (8.2)$$

وبما أن:

$$\hat{\beta} = \sum K_i \quad {}_i$$

$$\therefore \ \hat{\alpha} = \bar{Y} - \bar{X} \sum K_i Y_i \ldots\ldots\ldots (32.2)$$

وبما أن:

$$\bar{\mathrm{Y}} = \frac{1}{N} \sum Y_i$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N} \sum Y_i - \bar{X} \sum K_i Y_i$$

وبوضع $\sum Y_i$ خارج قوسين (نخرجه كعامل مشترك) نحصل على:

$$\hat{\alpha} = \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{X} K_i \right) Y_i \ldots\ldots\ldots (33.2)$$

وبما أن $(\bar{X})$ تمثل قيمة ثابتة، وكذلك (K_i). إذن تكون $(\hat{\alpha})$ دالة خطية لقيم المتغير التابع (Y_i).

2. **المقدرات غير متحيزة (Unbiased Estimators):** يقصد بالمقدرات غير متحيزة أن كل من $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ غير متحيزة (أنظر الشكل 6.2). ويحدث ذلك عندما:

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha$$

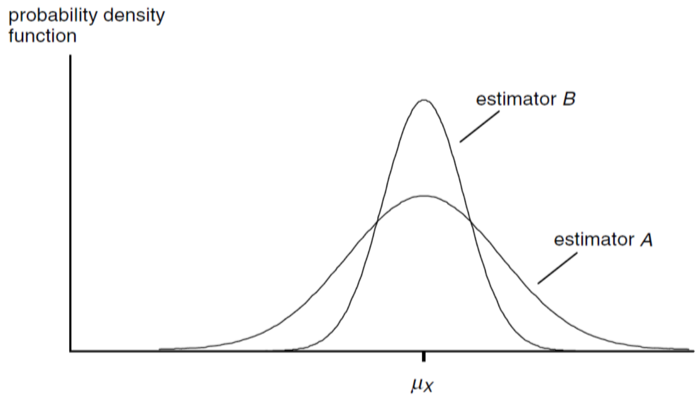
$$E(\hat{\beta}) = \beta \ldots\ldots\ldots (34.2)$$

حيث أن:

$E(\hat{\alpha})$: القيمة المتوقعة للقيمة المقدرة لـ α

$E(\hat{\beta})$: القيمة المتوقعة للقيمة المقدرة لـ β

الشكل (6.2): مقدرات غير متحيزة لكن بتباينين مختلفين



Source : Dougherty. C. (2007). Introduction to econometrics, 3rd Ed, Oxford University Press, USA, p. 15.

3. تباين المقدرات أقل ما يمكن (Minimum-Variance Estimators): يقصد بتباين المقدرات أقل ما يمكن أن تباين كل من $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ كل على حدة أقل ما يمكن. ويحدث ذلك عندما يكون تباين كل من $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ على حدة أقل من تباين أي قيمة مقدرة أخرى، أي:

$$Var(\hat{\alpha}) < Var(\tilde{\alpha})$$
$$Var(\hat{\beta}) < Var(\tilde{\beta}) \ldots\ldots\ldots (35.2)$$

حيث أن:

$\tilde{\alpha}$: القيمة المقدرة الأخرى لــ α

$\tilde{\beta}$: القيمة المقدرة الأخرى لــ β

ويلاحظ أن أفضل المقدرات هي التي يكون تباينها أقل ما يمكن. كما يلاحظ أن التقديرات تكون كفؤة (Efficient) إذا **توافرت على الخاصيتين الثانية والثالثة معا** (المقدرات غير متحيزة وتباين المقدرات أقل ما يمكن). وبالتالي يمكن القول أن تحقق خاصية المقدرات غير متحيزة فقط ليس له أهمية. ويكون لهذه الخاصية أهمية إذا اقترنت بخاصية تباين المقدرات أقل ما يمكن[4].

ومما سبق، يمكن القول بأن تقديرات طريقة (OLS) هي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة (BLUE).

[4] مجدي الشوربجي. (1994). الاقتصاد القياسي: النظرية والتطبيق، الدار المصرية اللبنانية، القاهرة، ص. 64.

تقدير معاملات نموذج الانحدار غير الخطي البسيط

مثال تطبيقي:

بفرض أن نموذج الانحدار غير الخطي البسيط المراد تقديره كان كما يلي:

$$Y_i = \alpha \acute{e}^{\beta X_i} \dots \dots \dots (36.2)$$

$$(i = 1,2, \dots , N)$$

حيث أن:

Y : الناتج القومي الإجمالي (Gross Domestic Product : GDP)

X : الزمن (Time)

β, α : معاملات الانحدار

$\acute{e}$: أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي 2.71828

وإن بيانات هذا النموذج معطاة في الجدول الموالي:

X_i	Y_i
1	12,18
2	20,09
3	33,12
4	54,6
5	90,02
6	148,41
7	244,69
8	403,43
9	665,14
10	1096,63
11	1808,04
12	2980,96
13	4914,77
14	8103,08
15	13359,7
16	22026,5
17	36315,5
18	59874,1
19	98715,8
20	162755

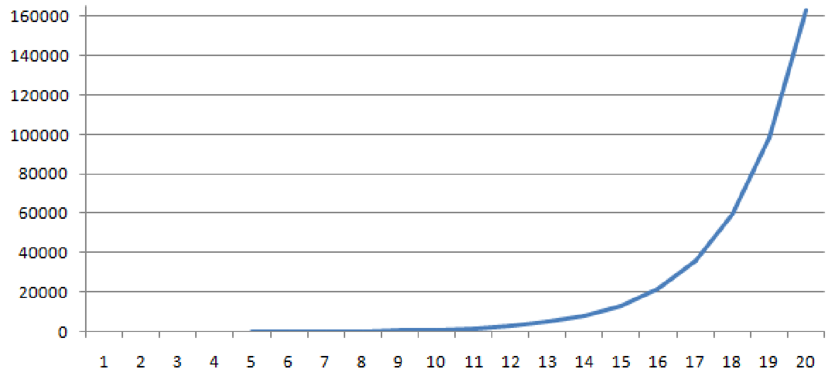
- **المطلوب:**

1. تقدير معادلة (OLS)
2. إيجاد معدل النمو السنوي المركب للناتج القومي الإجمالي.

- **ملاحظة:** التزم برقمين (02) بعد الفاصلة دون تقريب.

- **الحل:**

1. **تقدير معادلة (OLS):**



يتضح من الرسم البياني أن الناتج القومي الإجمالي (GDP) ينمو بصورة أسية بدلالة الزمن. لكي يمكن تقدير المعادلة (36.2) بطريقة (OLS) يجب تحويلها إلى معادلة خطية كما يلي:

$$lnY_i = ln\alpha + \beta ln\acute{e}^{X_i}$$

$$lnY_i = ln\alpha + \beta X_i \ldots\ldots\ldots (37.2)$$

وبوضع:

$$lnY_i = Y_i^*$$

$$ln\alpha = \alpha^*$$

فإن المعادلة رقم (37.2) تصبح كما يلي:

$$Y_i^* = \alpha^* + \beta X_i \ldots\ldots\ldots (38.2)$$

ويوضح الجدول الموالي البيانات المستخدمة في تقدير معاملات الانحدار:

X_i	Y_i^*
1	2,49
2	3,00
3	3,50
4	4,00
5	4,50
6	4,99
7	5,49
8	6,00
9	6,49
10	6,99
11	7,49
12	8,00

13	8,50
14	9,00
15	9,49
16	10,00
17	10,50
18	10,99
19	11,50
20	12,00

بتطبيق طريقة (OLS) فإننا نحصل على ما يلي:

$$\hat{Y}_i^* = 1.99 + 0.5X_i$$

يمكن استخدام المعادلة السابقة في التنبؤ على النحو التالي:

$$\hat{Y}_i^* = 1.99 + 0.5(1)$$

$$= 1.99 + 0.5 = 2.49$$

$$= ln\hat{Y}_1 = 2.49$$

نضع كلا طرفي المعادلة الأخيرة كأس لــ $(\acute{e})$ من أجل حذف اللوغاريتم الطبيعي (ln) كما يلي[5]:

$$\acute{e}^{ln\hat{Y}_1} = \acute{e}^{2.49}$$

$$\therefore \hat{Y}_1 = 12.06$$

2. إيجاد معدل النمو السنوي المركب للناتج القومي الإجمالي:

يمكن حساب معدل النمو السنوي المركب من خلال المعادلة التالية:

$$g = (\acute{e}^{\beta} - 1)100 \ldots\ldots\ldots (38.2)$$

حيث أن:

g: معدل النمو السنوي المركب للناتج القومي الإجمالي

$\acute{e}^{\beta}$: العدد المقابل للوغاريتم β

$$g = [(2.71828)^{0.5} - 1]100$$

$$= (1.6487 - 1)100 = 64.87\%$$

ومعنى ذلك أن الناتج القومي الإجمالي يزيد كل سنة بمعدل 64.87% .

[5] أنظر: سلسلة شوم: الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد. (2003). الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، ص ص. 331، 332.