الفصل الثالث: المسألة الثنائية (النموذج المقابل)

لكل صيغة للبرمجة الخطية والتي تسمى بالنموذج الأولي، هناك نموذج مقابل والذي يتم اللجوء إليه لتقليل من الجداول حتى الوصول إلى الحل الأمثل وخاصة في حالة عدد القيود في البرنامج الأولي أكبر من عدد المتغيرات. فهناك العلاقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية، حيث إذا كانت المشكلة الأصلية تهدف لتحديد المزيج الأمثل السلعي والذي يحقق أقصى ربح وذلك عند الاستغلال الأفضل للموارد والطاقات المستخدمة في الإنتاج، فإن المشكلة الثنائية تتعلق بتحديد تكلفة إنتاج أو سعر شراء الوحدة الواحدة من الموارد المتاح استخدامها، وكذلك لقياس نسبة مساهمة كل مورد من المواد المستخدمة في الإنتاج في تحقيق العائد من كل منتج. وللاعتماد على النموذج المقابل هناك العديد من المتغيرات يجب القيام بها وهي:

1- نقلب صيغة دالة الهدف في البرنامج المقابل من max إلى min ومن min إلى max

2- البرنامج الأصلي يجب أن يكون في الصيغة القانونية حتى يمكن اللجوء إلى النموذج المقابل، بحيث في التعظيم تكون القيود في حالة أصغر أو يساوي وفي التقليل تكون القيود في حالة أكبر أو يساوي وفي أي حالة مخالفة لذلك، فإننا نضرب طرفي المتراجحه في (-1) ونقلب اتجاهها، ونقبل بأن الطرف الثاني ليس عدد موجبا، لكن يجب أن يكون ثابتا، مع ملاحظة أن في حالة قيد فيه (=) فإنه يتم قسمتها إلى متراجحتان واحدة فيها ($\leq$) والأخرى فيها ($\geq$) والقيد المعاكس لدالة الهدف نضرب طرفيه في (-1) فيتم تغيير اتجاه المتراجحة. وعدد القيود في النموذج المقابل يساوي دائما عدد المتغيرات الأساسية في النموذج الأولي.

3- في النموذج المقابل يتم تغيير اتجاه المتراجحة.

4- عمود الثوابت bi في البرنامج الأولي يتحول إلى معاملات متغيرات دالة الهدف في البرنامج المقابل.

5- لتحديد معاملات القيود للبرنامج المقابل، فإننا نشكل مصفوفة البرنامج الأولي ونقلبها بحيث الصف الأول يتحول إلى العمود الأول والصف الثاني يتحول إلى العمود الثاني ...إلخ مع المحافظة على الترتيب.

6- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي تتحول إلى ثوابت القيود في البرنامج المقابل بنفس الترتيب.

7- في الحل الأمثل للبرنامج المقابل، فإن المتغيرات تكون لها علاقة بمتغيرات الحل الأمثل للبرنامج الأولي بحيث متغيرات الفجوة لكل برنامج تساوي المتغيرات الأساسية للبرنامج الأخر وذلك بقيم مطلقة مع مراعاة الترتيب.

8- قيمة الدالة والتي تكون بالقيمة المطلقة، فإنها في البرنامجين تكون متساوية.

ملاحظات:

- المشاكل التي تواجه استخدام النموذج المقابل، وهي تتمثل فيما يلي:

1- حالة عدم تناسق دالة الهدف مع علاقات القيود: عندما يتم السعي لتعظيم دالة الهدف وفي نفس الوقت تكون القيود في حالة أكبر أو يساوي أو يتم تقليل دالة الهدف وفي نفس الوقت تكون القيود في حالة أصغر أو يساوي، فيمكن تجاوز هذه المشكلة من خلال ضرب دالة الهدف في (-1) فيتحول التعظيم إلى التقليل أو التقليل إلى التعظيم.

2- عندما تمتزج اتجاهات القيود في نموذج واحد فيتم ضرب القيود التي لا تتناسب مع دالة الهدف في (-1).

- لما يكون في البرنامج العادي القيد في حالة يساوي فإن المتغير المتعلق به في النموذج المقابل يكون غير محدد الإشارة، وإذا كان المتغير غير محدد الإشارة فيكون القيد المتعلق به في النموذج المقابل في حالة يساوي. وبعبارة أخرى إذا تم الانتقال من النموذج الأولي إلى المقابل دون تقسيم القيد الذي فيه يساوي إلى معادلتان، فإن المتغيرة y التي تقابل المعادلة التي فيه يساوي تكون حرة تنتمي

($\infty -$ ، $+ \infty$) والقيود تكون حسب الصيغة القانونية بما يتوافق مع دالة الهدف في النموذج المقابل.

التمرين رقم 22:

$$\text{Max } \pi = 10\,x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6\,x_3 \geq 10$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 15$$

$$x_1 + 3\,x_3 = 4$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

تحويل دالة الهدف من التعظيم إلى التقليل، ثم جعل كل القيود في الصيغة القانونية من الشكل $\leq$

$$-2x_1 - 4x_2 - 6\,x_3 \leq -10$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 15$$

$$x_1 + 3\,x_3 \leq 4$$

$$-x_1 - 3\,x_3 \leq -4$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20$$

الطرف الثاني للمتراجحات يمثل معاملات دالة الهدف للبرنامج المقابل

$$\text{Min } = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5$$

نشكل المصفوفة الأصلية

−2	−4	−6
4	7	0
1	0	3
−1	0	−3
6	4	1

ثم نقوم بقلب المصفوفة

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

من هذه المصفوفة نشكل قيود النموذج المقابل وذلك بمراعاة عكس اتجاه المتراجحات، والطرف الثاني هو معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي

$-2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 + 6y_5 \geq 10$

$-4y_1 + 7y_2 + 4y_5 \geq 4$

$-6y_1 + 3y_3 - 3y_4 + y_5 \geq 2$

ثم نقوم بالحل كما تعودنا سابقا

$-2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 + 6y_5 - y_6^e + y_7^a = 10$

$-4y_1 + 7y_2 + 4y_5 - y_8^e + y_9^a = 4$

$-6y_1 + 3y_3 - 3y_4 + y_5 - y_{10}^e + y_{11}^a = 2$

$Min = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5 + 0y_6^e + my_7^a + 0y_8^e + my_9^a + 0y_{10}^e + my_{11}^a$

نستخرج y^a من كل قيد ونعوضها في دالة الهدف الجديدة

$y_7^a = 10 + 2y_1 - 4y_2 - y_3 + y_4 - 6y_5 + y_6^e$

$y_9^a = 4 + 4y_1 - 7y_2 - 4y_5 + y_8^e$

$y_{11}^a = 2 + 6y_1 - 3y_3 + 3y_4 - y_5 + y_{10}^e$

$Min = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5 + 0y_6^e + m(10 + 2y_1 - 4y_2 - y_3 + y_4 - 6y_5 + y_6^e) + 0y_8^e + m(4 + 4y_1 - 7y_2 - 4y_5 + y_8^e) + 0y_{10}^e + m(2 + 6y_1 - 3y_3 + 3y_4 - y_5 + y_{10}^e)$

$Min = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5 + 0y_6^e + 10m + 2my_1 - 4my_2 - my_3 + my_4 - 6my_5 + my_6^e + 0y_8^e + 4m + 4my_1 - 7my_2 - 4my_5 + my_8^e + 0y_{10}^e + 2m + 6my_1 - 3my_3 + 3my_4 - my_5 + my_{10}^e$

$Min = (-10 + 12m)y_1 + (15 - 11m)y_2 + (4 - 4m)y_3 + (-4 + 4m)y_4 + (20 - 11m)y_5 + my_6^e + 0y_7^a + my_8^e + 0y_9^a + my_{10}^e + 0y_{11}^a + 16m$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	bi	bi / yi
Y_7^a	-2	4	1	-1	6	-1	1	0	0	0	0	10	$\frac{10}{4}$
Y_9^a	-4	7	0	0	4	0	0	-1	1	0	0	4	$\frac{4}{7}$ ←
y_{11}^a	-6	0	3	-3	1	0	0	0	0	-1	1	2	$+\infty$
Dz	-10 +12m	15 - 11m	4 - 4m	4 +4m	20 - 11m	m	0	m	0	m	0	-16 m	

↑ هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	Bi	bi / yi
Y_7^a	$\frac{2}{7}$	0	1	-1	$\frac{26}{7}$	-1	6	$\frac{4}{7}$	/	0	0	$\frac{54}{7}$	$\frac{27}{13}$
Y_2	$-\frac{4}{7}$	1	0	0	$\frac{4}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	/	0	0	$\frac{4}{7}$	1 ←
y_{11}^a	-6	0	3	-3	1	0	0	0	/	-1	1	2	2
Dz	$-\frac{4}{7}+\frac{40}{7}$ m	0	4 - 4m	4 +4m	$\frac{80}{7}-\frac{33}{7}$ m	m	0	$\frac{15}{7}-\frac{4}{7}$ m	/	m	0	$-\frac{60}{7}-\frac{68}{7}$ m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

$$\text{Min} = (-10 +12m)\,0 + (15 -11m)\,\frac{4}{7} + (4 -4m)\,0 + (-4 +4m)\,0 + (20 -11m)\,0 + m \times 0 + 0 \times \frac{54}{7} + m \times 0 + 0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 2 + 16\,m$$

$$\text{Min} = (15 -11\,m)\,\frac{4}{7} + 9\,m = \frac{60}{7} - \frac{44}{7}\,m + 16\,m$$

$$\text{Min} = \frac{60}{7} + \frac{68}{7}\,m$$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	Bi	bi / yi
Y_7^a	4	$\frac{13}{2}$	1	-1	0	-1	6	$\frac{3}{2}$	/	0	0	4	4
Y_5	-1	$\frac{7}{4}$	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	/	0	0	1	$+\infty$
y_{11}^a	- 5	$-\frac{7}{4}$	3	-3	0	0	0	$\frac{1}{4}$	/	-1	1	1	$\frac{1}{3}$ ←
Dz	10 +m	$-20+\frac{33}{4}m$	4 - 4m	4 +4m	0	m	0	$5-\frac{7}{4}$ m	/	m	0	-20 - 5 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

Min = (-10 +12m) 0 + (15 -11m) 0 +(4 -4m) 0 +(-4 +4m) 0 +(20 -11m) 1 + m × 0 + 0 × (4) + m× 0 + 0× 0 + m× 0 + 0× 1 + 16 m

Min = (20 -11m) 1 + 16 m = 20 + 5 m

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	Bi	bi / yi
Y_7^a	$\frac{17}{3}$	$\frac{85}{12}$	0	0	0	-1	6	$\frac{17}{12}$	/	$\frac{1}{3}$	/	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{17}$ ←
Y_5	- 1	$\frac{7}{4}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	/	0	/	1	- 1
Y_3	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{12}$	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{12}$	/	$-\frac{1}{3}$	/	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$
Dz	$\frac{50}{3}-\frac{17}{3}$ m	$-\frac{53}{3}+\frac{71}{12}$ m	0	8	0	m	0	$\frac{14}{3}-\frac{17}{12}$ m	/	$\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$ m	/	$-\frac{64}{3}-\frac{11}{3}$ m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

$$\text{Min} = (-10 + 12m)\,0 + (15 - 11m)\,0 + (4 - 4m)\frac{1}{3} + (-4 + 4m)\,0 + (20 - 11m)\,1 + m \times 0 +$$

$$0 \times \frac{11}{3} + m \times 0 + 0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 1 + 16\,m$$

$$\text{Min} = (4 - 4m)\frac{1}{3} + (20 - 11m)\,1 + 9\,m = \frac{4}{3} + 20 - \frac{4}{3}m - 11\,m + 16\,m$$

$$\text{Min} = \frac{64}{3} + \frac{11}{3}m$$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	bi	bi / yi
y_1	1	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$-\frac{3}{17}$	/	$\frac{1}{4}$	/	$\frac{1}{17}$	/	$\frac{11}{17}$	
Y_5	0	3	0	0	1	$-\frac{3}{17}$	/	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{17}$	/	$\frac{28}{17}$	
Y_3	0	$\frac{3}{2}$	1	-1	0	$-\frac{5}{17}$	/	$\frac{1}{2}$	/	$-\frac{4}{17}$	/	$\frac{24}{17}$	
Dz	0	$-\frac{231}{6} + 13\,m$	0	8	0	$\frac{50}{17}$	/	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{6}{17}$	/	$-\frac{546}{17}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم الصف dz موجبة أو معدومة

$$\text{Min} = (-10 + 12m)\frac{11}{17} + (15 - 11m)\,0 + (4 - 4m)\frac{24}{17} + (-4 + 4m)\,0 + (20 - 11m)\frac{28}{17} + m \times 0 +$$

$$0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 1 + 16\,m$$

$$\text{Min} = (-10 + 12m)\frac{11}{17} + (4 - 4m)\frac{24}{17} + (20 - 11m)\frac{28}{17} + 16\,m$$

$$\text{Min} = -\frac{110}{17} + \frac{132}{17}m + \frac{96}{17} - \frac{96}{17}m + \frac{560}{17} - \frac{308}{17}m + 16\,m$$

$$\text{Min} = \frac{96 + 560 - 110}{17} + \frac{132 + 272 - 96 - 308}{17}m$$

$$\text{Min} = \frac{546}{17}$$