قسم العلوم الاقتصادية

مسؤولة المقياس الدكتورة امال خدادمية

تمارين محلولة في بحوث العمليات

تمرين01 :

تنتج شركة المنتجات A و Bو Cو .Dهناك أربعة عمال (1–2–3–4) قادرين على إنتاج أي من هذه المنتجات. يختلف وقت المعالجة من ورشة إلى آخرى تسجل الشركة 8 ساعات عمل يوميًا وتسمح بـ 30 دقيقة لتناول الغداء. تحقق المنتجات Aو Bو Cو Dأرباحًا قدرها 8 و6 و5 و4 (ألف دينار جزائري) لكل منتج على التوالي. يتم إعطاء وقت المعالجة لكل منتج أدناه. ابحث عن الجدول الزمني الأمثل للتوزيع لزيادة الأرباح.

العمال	A	B	C	D
1	15	9	10	6
2	10	6	9	6
3	25	15	15	9
4	15	9	10	10

حل التمرين01 :

سنقوم بتكوين نموذج برمجة خطية (بهدف تعظيم الربح). إليك خطوات الحل:

تحديد متغيرات القرار :

لدينا شركة تُنتج 4 منتجات:
هناك 4 عمّال (1-2-3-4)
كل عامل يعمل 8 ساعات في اليوم مع 30 دقيقة راحة، أي 7.5ساعة = 450 دقيقة متاحة يوميًا
أرباح المنتجات:

A = 8

B = 6

C = 5

D = 4

الجدول يوضح الوقت (بالدقائق) الذي يحتاجه كل عامل لإنتاج وحدة من كل منتج.

المتغيرات:

نفترض x_{ij}: عدد الوحدات من المنتج j التي يتم إنتاجها بواسطة العامل i

تمارينات محلولة في مادة : أساسيات في بحوث العمليات

حيث i (يمثل العمال المشتغلين من 1 إلى 4 و j تمثل المنتجات إما **A** أو **B** أو **C** أو **D**

دالة الهدف: المؤسسة نريد تعظيم الربح، أي:

$$Max\ (Z) = 8(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A}) + 6(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B}) + 5(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C}) + 4(x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D})$$

القيود:

لكل عامل، لا يتجاوز مجموع الأوقات المستخدمة 450 دقيقة: للعامل i :

$$\begin{cases} 15x_{1A} + 9x_{1B} + 10x_{1C} + 6x_{1D} \leq 450 \\ 10x_{2A} + 6x_{2B} + 9x_{2C} + 10x_{2D} \leq 450 \\ 25x_{3A} + 15x_{3B} + 15x_{3C} + 9x_{3D} \leq 450 \\ 15x_{4A} + 9x_{4B} + 10x_{4C} + 10x_{4D} \leq 450: \\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i,j \end{cases}$$

تمرين02 :

لدى طالب امتحانان نهائيان للاستعداد لهما. من المتوقع أن تعود عليه كل ساعة من الدراسة التي يخصصها للمادة A بمبلغ 600 روبية من حيث الفوائد على المدى الطويل، ومن المتوقع أن تعود عليه كل ساعة من الدراسة التي يخصصها للمادة B بمبلغ 300 روبية من حيث الفوائد على المدى الطويل. المتاجر مغلقة جميعها؛ لدى الطالب 15 قطعة من الشوكولاتة فقط. يشعر أنه يحتاج إلى قطعة شوكولاتة واحدة كل 20 دقيقة أثناء الدراسة للمادة B وواحدة كل 12 دقيقة أثناء الدراسة للمادة A. الوقت ينفد ولم يتبق سوى 4 ساعات للاستعداد للامتحان. من الضروري أن يخصص الطالب ساعتين على الأقل للدراسة. يرغب الطالب في تحقيق أقصى عائد من الجهد المبذول. حل هذه المشكلة كنموذج برمجة خطية وحدد السياسة المثلى للطالب من خلال حل المشكلة.

حل التمرين 02

1- تحديد المتغيرات:

X_1 :عدد الساعات التي يدرسها لمقرر A

X_2 :عدد الساعات التي يدرسها لمقرر B

2- تحديد دالة الهدف:

نريد تعظيم العائد : $\{Max\}\ Z = 600\ X_1 + 300\ X_2$

3- تحديد **القيود:**

القيد الأول خاص بـ : الوقت الكلي المتاح $X_1 + X_2 \leq 4$

القيد الثاني خاص ب : الوقت الأدنى المطلوب $X_1 + X_2 \geq 2$

القيد الثالث خاص بـ : عدد قطع الشوكولاتة المتاحة (15 قطعة):

يستهلك 1 قطعة كل 12 دقيقة لـ → A أي 5 قطع في الساعة

يستهلك 1 قطعة كل 20 دقيقة لـ → B أي 3 قطع في الساعة

ومنه القيد كالتالي :

$$5 X_1 + 3 X_2 \leq 15$$

4- شرط عدم السلبية : $X_1 , X_2 \geq 0$

ومنه نموذج البرمجة الخطية كالتالي :

$$\text{Max } (Z) = = 600 X_1 + 300 X_2$$

Subject to

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1 + X_2 \geq 2 \\ 5 X_1 + 3 X_2 \leq 15 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 03 :

مصنع لتصنيع مواد التعبئة ينتج نوعين من علب التعبئة (مستديرة ومسطحة) ، حيث أن المرافق الإنتاجية الرئيسية المعنية هي القطع والانضمام، يمكن لقسم القطع معالجة 300 علبة مستديرة أو 500 علبة مسطحة في الساعة، يمكن لقسم الانضمام معالجة 400 علبة مستديرة و300 علبة مسطحة في الساعة.
إذا كانت مساهمة الربح من العلب المستديرة هي 100 وحدة نقدية لكل علبة ومن العلب المسطحة هي 80 وحدة نقدية لكل علبة صغ المشكلة كنموذج برمجة خطية.

حل التمرين 03:

1.تعريف المتغيرات:

لنفرض:

X_1عدد العلب **المستديرة** التي سيتم إنتاجها في الساعة

X_2عدد العلب **المسطحة** التي سيتم إنتاجها في الساعة

2.دالة الهدف (الربح) تعظيم :

مساهمة الربح:

العلبة المستديرة = 100 وحدة نقدية

العلبة المسطحة = 80 وحدة نقدية

إذن، **الهدف** هو Max(z) :

$$Max\ (Z\ )=100\ X_1+80\ X_2$$

3.القيود (حسب قدرة الماكينات):

أ. قسم القطع:

يمكنه قطع **300علبة مستديرة** أو **500علبة مسطحة** في الساعة.

إذًا:

$\frac{X1}{300}+\frac{X2}{500}\leq 1$ (الوقي الوقت المتاح للقطع في ساعة واحدة)

ب. قسم الانضمام:

يمكنه ضم **400علبة مستديرة** أو **300علبة مسطحة** في الساعة.

إذًا:

$\frac{X1}{400}+\frac{X2}{300}\leq 1$ (الوقي الوقت المتاح للانضمام في ساعة واحدة)

4- شرط عدم السلبية : $X_1\ ,\ X_2\geq 0$

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

$$\begin{cases} Max\ (Z\ )=100\ X_1+80\ X_2 \\ \frac{X1}{300}+\frac{X2}{500}\leq 1 \\ \frac{X1}{400}+\frac{X2}{300}\leq 1 \\ X_1\ ,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

تمارينات محلولة في مادة : أساسيات في بحوث العمليات

تمرين 04 :

طالب سنة الثانية بكلية العلوم الاقتصادية لديه امتحانين نهائيين للاستعداد لهما. كل ساعة من الدراسة التي يكرسها لمادة أساسيات بحوث العمليات يتوقع أن تعود عليه بمبلغ 6000 وحدة نقدية كفائدة كبيرة. كل ساعة مكرسة لمادةالاقتصاد الكلي يتوقع أن تعود عليه بمبلغ 300 وحدة نقدية من حيث الفائدة على المدى الطويل. جميع المتاجر مغلقة والطالب لديه فقط 20 سيجارة، يشعر أنه يحتاج إلى سيجارة واحدة كل 20 دقيقة أثناء دراسة الاقتصاد الكلي وواحدة كل 12 دقيقة أثناء دراسة أساسيات بحوث العمليات الوقت ينفد ولا يتبقى سوى 4 ساعات للاستعداد للامتحانات، من الضروري أن يرغب الطالب في تعظيم عوائده مقابل الجهد الذي يبذله.

المطلوب : صغ لهذه المشكلة نموذج البرمجة الخطية المناسب.

حل التمرين 04:

لدينا هنا مشكلة تحسين (Optimization) نموذجية، يمكن تمثيلها كنموذج **برمجة خطية**حيث الهدف هو تعظيم العائد من تخصيص وقت الدراسة بين مادتين، مع وجود قيود زمنية وقيود على عدد السجائر.

1.تعريف المتغيرات:

لنرمز إلى:

X_1عدد **الساعات** التي سيقضيها الطالب في دراسة **أساسيات بحوث العمليات**

X_2عدد **الساعات** التي سيقضيها الطالب في دراسة **الاقتصاد الكلي**

2.دالة الهدف:

الهدف هو **تعظيم الفائدة الإجمالية**:

من بحوث العمليات: 6000 دج لكل ساعة $\rightarrow 600\ X_1$

من الاقتصاد الكلي: 300 دج لكل ساعة $\rightarrow 300\ X_2$

إذن دالة الهدف:

$$Max\ (Z\ )=600\ X_1+300\ X_2$$

3.القيود:

أ. قيد الزمن:

الوقت المتاح هو 4 ساعات فقط:

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

ب. قيد السجائر:

أثناء دراسة بحوث العمليات: يحتاج لسيجارة كل 12 دقيقة أي 5 سجائر لكل ساعة $\rightarrow 5X_1$

أثناء دراسة الاقتصاد الكلي: سيجارة كل 20 دقيقة أي 3 سجائر في الساعة $\rightarrow 3\ X_2$

وهو يملك فقط 20 سيجارة :

إذا :

$5\ X_1 + 3\ X_2 \leq 20$

4- شرط عدم السلبية : $X_1\ ,\ X_2 \geq 0$

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

$$\begin{cases} Max\ (Z) = 600\ X_1 + 300\ X_2 \\ X_1 + X_2 \leq 4 \\ 5\ X_1 + 3\ X_2 \leq 20 \\ X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 05 :

اعتبر مصنعًا صغيرًا يصنع نوعين من قطع غيار السيارات، وهما A و B يشتري المصنع القوالب من مورد أجنبي تكلفة القوالب للجزء A هي 2 مليون وحدة نقدية لكل واحدة، وتكلفة القوالب للجزء B هي 3 مليون وحدة نقدية لكل واحدة ، يتم تشغيل القوالب وتثقيبها وتلميعها حيث تفاصيل قدرة التشغيل وتكاليف تشغيل الآلات هي كما يلي:

الألات			تكلفة التشغيل (مليون وحدة نقدية في الساعة)
	الجزء A	الجزء B	
ماكينة الخراطة	25	40	20
التفريغ	28	35	14
التلميع	35	25	17.50
سعر البيع/وحدة	5	6	

تشير الجدول أعلاه أيضًا إلى سعر البيع للجزئين. بافتراض أنه يمكن بيع أي مجموعة من الجزء A والجزء B في السوق، حدد التركيبة المثلى للمنتجات. صغ ما سبق كنموذج برمجي خطي.

حل التمرين 05:

1- تحديد المتغيرات :

X_1عدد الوحدات المنتجة من الجزءA

X_2عدد الوحدات المنتجة من الجزءB

2- تحديد دالة الهدف :

لحساب **الربح الصافي** لكل جزء نأخذ:

الربح لكل وحدة = سعر البيع ـ تكلفة القالب / وحدة ـ تكلفة التشغيل / وحدة

الجزء:A

تكلفة القالب لكل وحدة = 2 مليون

تكلفة التشغيل لكل وحدة=

خراطة : $\frac{1}{25}$ساعة $\times 20 = 0.8$

تفريغ : $\frac{1}{28} \times 14 \approx 0.5$

تلميع : $\frac{1}{35} \times 17.5 = 0.5$

مجموع تكلفة التشغيل ≈ 1.8 مليون

الربح = 5−2−1.8 =1.2 مليون

الجزء:B

تكلفة القالب = 3 مليون

تكلفة التشغيل لكل وحدة=

خراطة: $\frac{1}{40} \times 20 = 0.5$

تفريغ : $\frac{1}{35} \times 14 \approx 0.4$

تلميع : $\frac{1}{25} \times 17.5 = 0.7$

مجموع تكلفة التشغيل ≈ 1.6 مليون وعليه يمكن حاب الربح كما يلي :

الربح = 6−3−1.6 =1.4 مليون

وعليه دالة الهدف كما يلي :

$$Max\ (Z) = 1.2X_1 + 1.4X_2$$

3- القيود :

القيود (القدرة الزمنية):

ماكينة الخراطة (ساعات التشغيل):

$$\frac{X1}{25} + \frac{X2}{40} \leq \text{ساعات متاحة للخراطة}$$

ماكينة التفريغ:

$$\frac{X1}{28} + \frac{X2}{35} \leq \text{ساعات متاحة للتفريغ}$$

ماكينة التلميع:

$$\frac{X1}{35} + \frac{X2}{25} \leq \text{ساعات متاحة للتلميع}$$

أي :

$$\frac{X1}{25} + \frac{X2}{40} \leq 1000$$

ماكينة التفريغ:

$$\frac{X1}{28} + \frac{X2}{35} \leq 1000$$

ماكينة التلميع:

$$\frac{X1}{35} + \frac{X2}{25} \leq 1000$$

4- شرط عدم السلبية : $X_1 , X_2 \geq 0$

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

$$Max\ (Z) = 1.2X_1 + 1.4X_2$$

$$\begin{cases} \frac{X1}{25} + \frac{X2}{40} \leq 1000 \\ \frac{X1}{28} + \frac{X2}{35} \leq 1000 \\ \frac{X1}{35} + \frac{X2}{25} \leq 1000 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 06 :

تسعى شركة لتحديد الخلط الصحيح لنوعين من العلف. يحتوي كلاهما على نسب مختلفة من أربعة مكونات أساسية كما هو موضح أدناه:

مكون	نسبة لكل كيلوجرام من العلف		(الحد الأدنى المطلوب /كجم)
	1	2	
1	40	30	5
2	10	30	2
3	20	40	4
4	40	10	6

إذا كانت تكلفة العلف I هي 50 دح لكل كيلوغرام وتكلفة العلف II هي 40 دج لكل كيلوغرام، حدد أقل تكلفة لمزيج العلف.

حل التمرين 06 :

لحل هذا النوع من المسائل، نستخدم **البرمجة الخطية** بهدف **تحديد أقل تكلفة** لمزيج من نوعين من العلف، بحيث يحقق **الحد الأدنى المطلوب من المكونات** الأربعة.

1-تحديد المتغيرات:

X_1 كمية العلف 1 (بالكغ)

X_2 كمية العلف 2 (بالكغ)

2- تحديد دالة الهدف

دالة الهدف $Min\ (Z) = 50X_1 + 40X_2$

3- تحديد القيود :

قيد المكون 1:

$$40\ X1 + 30\ X2 \geq 5$$

قيد المكون 2:

$$10\ X1 + 30\ X2 \geq 2$$

قيد المكون 3:

$$20\ X1 + 40\ X2 \geq 4$$

قيد المكون 4:

$$40\ X1 + 10\ X2 \geq 6$$

4- شرط عدم السلبية

مع شرط أن:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

دالة الهدف $\text{Min } (Z) = 50X_1 + 40X_2$

$$\begin{cases} 40\ X_1 + 30\ X_2 \geq 5 \\ 10\ X_1 + 30\ X_2 \geq 2 \\ 20\ X_1 + 40\ X_2 \geq 4 \\ 40\ X_1 + 10\ X_2 \geq 6 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 07 :

يقدم **مركز الأمل للطبخ** نوعين من الخدمات لعملائه، وهما "الخدمة العادية" و"الخدمة الخاصة". كل ساعة تُقضى في "الخدمة العادية" تُحقق مساهمة قدرها 250 وحدة نقدية ، في حين أن المساهمة لكل ساعة في "الخدمات الخاصة" هي 500 وحدة نقدية ، تتطلب "الخدمة الخاصة" نشر برامج طبخ لطباخين مهرة ، ويتوفر للمركز حد أقصى من 100 ساعة أسبوعيًا من وقت الطباخين. كلا الخدمتين تتطلبان وقت للطبخ ، ويتوفر حد أقصى من 400 ساعة من وقت الطبخ أسبوعيًا، تكاليف التشغيل بالساعة لخدمات "العادية" و"الخاصة" هي 100 وحدة نقدية و250 وحدة نقدية على التوالي ، الميزانية الأسبوعية لتغطية النفقات التشغيلية هي 80,000 وحدة نقدية . من أجل الحفاظ على حصة المركز في السوق لخدمة "العادية"، يجب على المركز تخصيص حد أدنى من 200 ساعة/أسبوع لخدمة "العادية". كيف يجب على المركز تخصيص الوقت للخدمتين، من أجل زيادة إجمالي المساهمة للمؤسسة؟

الحل 07:

لحل هذا النوع من المسائل، نحن بصدد **مسألة برمجة خطية** حيث الهدف هو **تعظيم إجمالي المساهمة**، مع وجود **قيود** تتعلق بالموارد وقت الطباخين، وقت الطهي، والتكلفة التشغيلية)، بالإضافة إلى حد أدنى على خدمة "العادية."

1-تحديد المتغيرات:

X_1 عدد الساعات المخصصة لـ **الخدمة العادية**

X_2عدد الساعات المخصصة لـ **الخدمة الخاصة**

2- تحديد دالة الهدف

يريد مركز الأمل للطبخ **تعظيم المساهمة الكلية**:

$$Max\ (Z)=250\ X_1 +500\ X_2$$

3- تحديد القيود :

أ. وقت الطباخين المهرة (فقط للخدمة الخاصة

$$X_2 \leq 100$$

ب. إجمالي وقت الطبخ (مطلوب لكلتا الخدمتين:

$$X_1 + X_2 \leq 400$$

ج. الميزانية التشغيلية:

تكلفة تشغيل الخدمة العادية: 100 لكل ساعة

تكلفة تشغيل الخدمة الخاصة: 250 لكل ساعة

$$100\ X_1+250\ X_2 \leq 80000$$

د. الحد الأدنى المطلوب للخدمة العادية:

$$X_1 \geq 200$$

4- عدم سالبية المتغيرات:

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

$$\begin{cases} Max\ (Z)=250\ X_1 +500\ X_2 \\ X_2 \leq 100 \\ X_1 + X_2 \leq 400 \\ 100\ X_1+250\ X_2 \leq 80000 \\ X_1 \geq 200 \\ X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 08 :

يمتلك مزارع 200 خروف تستهلك 90 كجم من العلف الخاص يوميًا. العلف هو خليط من الذرة وحبة فول الصويا مع التراكيب التالية.

العلف				التكلفة (وحدة نقدية /كيلوغرام)
	الكالسيوم	البروتين	الالياف	
ذرة	0.001	0.09	002	2
فول الصويا	0.002	0.6	0.06	6

المتطلبات الغذائية اليومية للخرفان هي:

- ✓ أقصى حد من الكالسيوم 1%
- ✓ على الأقل 30% بروتين.
- ✓ أقصى حد من الألياف5 %

المطلوب : حدد الحد الأدنى اليومي لتكلفة خليط العلف.

حل التمرين 08:

لحساب **الحد الأدنى اليومي لتكلفة خليط العلف** الذي يلبي المتطلبات الغذائية للخراف، نحتاج إلى **صياغة مسألة برمجة خطية علما أن الهدف هو** تقليل التكلفة

تحديد المتغيرات:

X_1 : كمية الذرة (بالكغم) في العلف اليومي.

X_2 : كمية فول الصويا (بالكغم) في العلف اليومي.

تحديد دالة الهدف:(Min (z

تكلفة الذرة = 2 وحدة / كغم

تكلفة فول الصويا = 6 وحدة / كغم

$$Min(z)=2\ X_1+6\ X_2$$

تحديد القيود الغذائية:

القيد الأول :

نعلم أن المجموع يجب أن يكون:

$$X_1 + X_2 = 90$$

القيد الثاني :

الكالسيوم: بحد أقصى 1% (0.01) من إجمالي العلف

نسبة الكالسيوم ≤ 1% من 90 كغم ⇒ بحد أقصى 0.9 كغم

ذرة: 0.001 كالسيوم لكل كغم

فول الصويا: 0.002 كالسيوم لكل كغم

الكالسيوم: بحد أقصى 1% (0.01) من إجمالي العلف = **0.01 × 90 = 0.9 kg**

$0.001\ X_1+0.002\ X_2 \leq 0.9$

القيد الثالث :

البروتين: على الأقل 30% أي (0.3) من إجمالي العلف

نسبة البروتين ≥ 30% من 90 كغم ⇒ على الأقل 27 كغم

الذرة تحتوي 0.09 بروتين لكل كغم
فول الصويا يحتوي 0.6 بروتين لكل كغم

البروتين : على الأقل 30% (0.3) من إجمالي العلف = **0.3 × 90 = 27 kg**

$0.09\ X_1+0.6\ X_2 \geq 27$

القيد الرابع :

الألياف:

بحد أقصى 5% (0.05) من إجمالي العلف

الألياف ≥ 5% من 90 كغم ⇒ بحد أقصى 4.5 كغم

ذرة: 0.02 ألياف لكل كغم

فول الصويا: 0.06 ألياف لكل كغم

= 0.05 × 90 = 4.5 kg

$0.02\ X_1+0.06\ X_2 \leq 4.5$

عدم سالبية المتغيرات:

$X_1 , X_2 \geq 0$

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

Minimize: $Z=2\ X_1+6\ X_2$
Subject to:
$x+y=90$ (إجمالي العلف)
$0.001\ X_1+0.002\ X_2 \leq 0.9$ (قيد الكالسيوم)
$0.09\ X_1+0.6\ X_2 \geq 27$ (قيد البروتين)
$0.02\ X_1+0.06\ X_2 \leq 4.5$ (قيد الالياف)
$X_1 , X_2 \geq 0$

تمرين 09 :

تصنع **شركة بيوجالينيك فارما** حبوب مسكنة للصداع بحجمين A و .B يحتوي الحجم A على 2 حبة أسبرين، و 5 حبات بيكربونات، و 1 حبة كوديين. يحتوي الحجم B على 1 حبة أسبرين، و 8 حبات بيكربونات، و 6 حبات كوديين. يجد المستخدمون أنه يتطلب على الأقل 12 حبة أسبرين، و 74 حبة بيكربونات، و 24 حبة كوديين لتوفير تأثير فوري إذا كان مطلوبًا تحديد أقل عدد من الحبوب التي يجب أن يأخذها المريض للحصول على تخفيف فوري. صغها كنموذج برمجة خطية.

حل تمرين 09 :

تحديد متغيرات القرار :

X_1عدد الحبوب من الحجم A

X_2عدد الحبوب من الحجم B

دالة الهدف:

نريد **تقليل** عدد الحبوب الكلي التي يتناولها المريض:

Min(Z) = $X_1 + X_2$

القيود :

حسب مكونات كل نوع والحاجة الكلية:

أ -الأسبرين:

- ✓ كل حبة A فيها 2 حبة أسبرين
- ✓ كل حبة B فيها 1 حبة أسبرين
- ✓ نحتاج على الأقل 12 حبة أسبرين:

$2X_1 + X_2 \geq 12$

ب – بيكربونات
Aفيها 5، Bفيها 8، نحتاج على الأقل 74:

$5X_1 + 8X_2 \geq 74$

جـ - كوديين:

Aفيها 1، B فيها 6، نحتاج على الأقل 24:

$X_1 + 6X_2 \geq 24$

عدم سالبية المتغيرات:

$X_1 , X_2 \geq 0$

ويفضل أن يكون X_1 , X_2 **أعداد صحيحة** لأن لا يمكن أخذ جزء من الحبة.

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

$$\begin{cases} \textbf{Min(Z)} = X_1 + X_2 \\ 2X_1 + X_2 \geq 12 \\ 5X_1 + 8X_2 \geq 74 \\ X_1 + 6X_2 \geq 24 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \\ X_1 , X_2 \in Z \end{cases}$$

تمرين 10 :

يتم في بنك BADR صياغة منشأة خدمات كاملة لسياسة القرض التي تتضمن حدًا أقصى من الأموال يبلغ 12 كرور روبية. توفر الجدول التالي بيانات ذات صلة حول أنواع القروض المختلفة ومعدلات الفائدة. الديون المعدومة هي ديون غير مستردة وبالتالي لا تنتج أي إيرادات فائدة. تتطلب المنافسة مع المؤسسات المالية الأخرى في المنطقة من البنك تخصيص ما لا يقل عن 40% من الأموال لقروض الزراعة والتجارة. لدعم صناعة الإسكان في المنطقة، يجب أن تكون قروض المنازل تعادل على الأقل 50% من القروض الشخصية، وقروض السيارات، وقروض المنازل. كما أن البنك لديه سياسة محددة تنص على أن النسبة الإجمالية للديون المعدومة على جميع القروض لا يجوز أن تتجاوز 0.04. صياغة مشكلة البرمجة الخطية لما سبق.

نوع القرض	سعر الفائدة	احتمالية الديون المتعثرة
شخصي	0.14	0.10
سيارة	0.13	0.07
منزل	0.12	0.03
مزرعة	0.125	0.05
تجاري	0.10	0.02

حل التمرين 10 :

تعريف المتغيرات:

لنرمز إلى المبالغ المخصصة لكل نوع قرض كالتالي (بوحدة الكرور روبية:

x_1 :مبلغ قرض **شخصي**

x_2 :مبلغ قرض **سيارة**

x_3 :مبلغ قرض **منزل**

x_4 :مبلغ قرض **مزرعة (زراعي)**

x_5 :مبلغ قرض **تجاري**

تمارينات محلولة في مادة : أساسيات في بحوث العمليات

دالة الهدف : زيادة الدخل المتوقع من الفائدة، وهو الفائدة مضروبة في احتمال السداد **(أي 1 - احتمال الديون المعدومة)**. لذا، فإن العائد المتوقع من كل قرض هو:

العائد المتوقع من القرض الشخصي: $0.14\times(1-0.10)=0.126$

العائد المتوقع من قرض السيارة: $0.13\times(1-0.07)=0.1209$

العائد المتوقع من قرض المنزل: $0.12\times(1-0.03)=0.1164$

العائد المتوقع من القرض الزراعي: $0.125\times(1-0.05)=0.11875$

العائد المتوقع من القرض التجاري: $0.10\times(1-0.02)=0.098$

$$\text{Max } (Z) = 0.126x_1+0.1209x_2+0.1164x_3+0.11875x_4+0.098x_5$$

القيود :

إجمالي القروض ≥ 12 كرور:

$$x1+x2+x3+x4+x5\leq 12$$

قروض الزراعة والتجارة ≤ 40% من إجمالي القروض:

$$0.4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) \leq \quad x_4+x_5$$

أو بعد الترتيب:

$$0.4(x_1+x_2+x_3) \leq \quad 0.6\ (x_4+x_5)$$

قروض المنازل ≤ 50% من (قروض شخصية + سيارة + منزل):

$$0.5(x1+x2+x3) \leq x3$$

يبسط إلى:

$$0.5x_1+0.5x_2 \ \leq 0.5\ x_3$$

أي :

$$x_1+x_2 \ \leq x_3$$

متوسط نسبة الديون المعدومة لجميع القروض ≥ 0.04:

$$\frac{0.10x1+0.07x2+0.03x3+0.05x4+0.02x5}{x1+x2+x3+x4+x5}\leq 0.04$$

اضرب الطرفين بمجموع القروض لتبسيطها:

$$0.10x1+0.07x2+0.03x3+0.05x4+0.02x5\leq 0.04(x1+x2+x3+x4+x5)$$

عدم سالبية المتغيرات:

$x1,x2,x3,x4,x5\geq 0$

ومنه نموذج البرمجة الخطية يكون كالتالي :

$$\text{Max } (Z)=0.126x_1+0.1209x_2+0.1164x_3+0.11875x_4+0.098x_5$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leq 12 \\ x_4+x_5\geq 0.4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) \\ x_3\geq 0.5(x_1+x_2+x_3) \\ 0.10x_1+0.07x_2+0.03x_3+0.05x_4+0.02x_5\leq 0.04(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{cases}$$

التمرين11 :

تمتلك شركة **أرامكو** للنفط وحدتين A و B تنتجان 3 درجات مختلفة من النفط:

- ✓ نفط فائق النقاء،
- ✓ نفط متوسط،
- ✓ نفط منخفض الجودة.

يجب على الشركة تزويد 12 و 8 و 24 برميلاً من النفط الفائق النقاء والمتوسط والمنخفض الجودة على التوالي في الأسبوع. تكلف الشركة 100 وحدة نقدية و 80 وحدة نقدية يومياً لتشغيل الوحدتين A و B على التوالي، تنتج الوحدة A 6، 2 ، 4 براميل، وتنتج الوحدة B 2 ، 2 ، 12 برميلاً من النفط الفائق النقاء والمتوسط والمنخفض الجودة يومياً، يجب على المدير أن يقرر عدد الأيام في الأسبوع التي يجب تشغيل كل وحدة فيها لتلبية المتطلبات بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب : صغ المسألة الرياضية

حل التمرين 11 :

تحديد المتغيرات :

x_1 عدد الأيام التي تعمل فيها الوحدة A في الأسبوع

x_2 عدد الأيام التي تعمل فيها الوحدة B في الأسبوع

الدالة الهدف: Min(Z)

نريد تقليل التكلفة الكلية:

Minimize Z=100 x_1+80 x_2

القيود:

نريد تلبية المتطلبات الأسبوعية من أنواع النفط الثلاثة:

1. **نفط فائق النقاء:**

$6\ x_1+2\ x_2 \geq 12$

2. **نفط متوسط الجودة:**

$2\ x_1+2\ x_2 \geq 8$

3. **نفط منخفض الجودة:**

$4\ x_1+12\ x_2 \geq 24$

عدد أيام العمل يجب أن يكون بين 0 و7 (أيام الأسبوع):

$0 \leq x_1 \leq 7$ $0 \leq x_2 \leq 7$,

وعليه بكون النموذج الخطي كما يلي:

Min(Z)=100 x_1+80 x_2

نفط فائق النقاء:

$6\ x_1+2\ x_2 \geq 12$

نفط متوسط الجودة:

$2\ x_1+2\ x_2 \geq 8$

نفط منخفض الجودة:

$4\ x_1+12\ x_2 \geq 24$

$X_1 , X_2 \geq 0$

تمرين12:

يمتلك مزارع مزرعة تبلغ مساحتها 100 هكتار بحيث يمكنه بيع جميع الطماطم و الخس و الفجل التي يمكنه زراعتها، السعر الذي يمكنه الحصول عليه هو 1 وحدة نقدية لكل كيلوجرام من الطماطم، و0.75 وحدة نقدية لكل رأس من الخس، و 2 وحدة نقدية لكل كيلوجرام من الفجل، متوسط العائد لكل هكتار هو 2000 كيلوجرام من الطماطم، و3000 رأس من الخس، و 1000 كيلوجرام من الفجل ، السماد متوفر بسعر 0.50 وحدة نقدية لكل كيلوجرام والكمية المطلوبة لكل هكتار هي 100 كيلوجرام لكل من الطماطم والخس و50 كيلوجرام للفجل، العمل المطلوب للبذر والزراعة والحصاد لكل هكتار هو 5 أيام عمل للطماطم والفجل و6 أيام عمل للخس علما أن إجمالي الأيام المتاحة للعمل هي 400 يوم عمل بسعر 20 وحدة نقدية لكل يوم عمل، صغ هذا المشكلة كنموذج برمجة خطية لتعظيم إجمالي ربح المزارع.

حل التمرين رقم 12:

1- تحديد المتغيرات:(Variables)

لنفرض:

x_1 : عدد الهكتارات المزروعة بالطماطم
x_2: عدد الهكتارات المزروعة بالخس
x_3: عدد الهكتارات المزروعة بالفجل

2- دالة الهدف:(Objective Function)

نحسب **الربح** من كل محصول بعد خصم تكلفة السماد والعمالة.

بالنسبة للطماطم:

العائد:

2000 كغ×1=2000 وحدة نقدية

تكلفة السماد:

100 كغ×0.5=50 وحدة نقدية

تكلفة العمالة:

5 أيام×20=100

صافي الربح للهكتار :

2000−50−100=1850 وحدة نقدية

بالنسبة للخس :

العائد :

3000 رأس×0.75=2250 وحدة نقدية

تكلفة السماد:

100 كغ×0.5=50 وحدة نقدية

تكلفة العمالة:

6 أيام×20=120 وحدة نقدية

صافي الربح للهكتار:

2250−50−120=2080 وحدة نقدية

بالنسبة للفجل:

العائد:

1000 كغ×2=2000 وحدة نقدية

تكلفة السماد:

50 كغ×0.5=25 وحدة نقدية

تكلفة العمالة :

5 أيام×20=100 وحدة نقدية

صافي الربح للهكتار :

2000−25−100=1875 وحدة نقدية

إذن: تعظيم الربح الكلي كما يلي

$$\text{Max } (Z)=1850x_1+2080x_2+1875x_3$$

3.القيود:(Constraints)

أ. المساحة المتاحة:

$$x_1+x_2+x_3 \leq 100$$

ب. العمالة المتاحة (400 يوم عمل):

$$5x_1+6x_2+5x_3 \leq 400$$

ج. عدم سلبية المتغيرات:

$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

و عليه يكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي :

Maximize Z=1850x1+2080x2+1875x3

Subject to:

x1+x2+x3≤100

5x1+6x2+5x3≤400

$x_1,x_2,x_3 \geq 0$

تمرين رقم 13 :

تمتلك **شركة الاسراء** للتعدين منجمين مختلفين ينتجان نوعًا معينًا من الخام بدرجات A و Bو .Cوقد تعاقدت شركة التعدين مع **مصنع جواهر للصهر على أن توفر له** 12 طنًا من خام الدرجةA ، و8 أطنان من خام الدرجةB ، و24 طنًا من خام الدرجة C في الأسبوع، يكلف تشغيل المنجم الأول الشركة 2000 وحدة نقدية يوميًا، و1600 وحدة نقدية يوميًا لتشغيل المنجم الثاني، في يوم التشغيل ينتج المنجم الأول 6 أطنان من خام الدرجة A ، و2 طن من خام الدرجة B، و4 أطنان من خام الدرجة C ، بينما ينتج المنجم الآخر يوميًا 2 طن من خام الدرجة A و2 طن من خام الدرجة .C صغ هذه المشكلة كمسألة برمجة خطية لتحديد عدد الأيام في الأسبوع التي يجب تشغيل كل منجم لتلبية طلبات الشركة بأكثر الطرق الاقتصادية.

حل التمرين رقم 13 :

1- تحديد المتغيرات:

نرمز إلى:

x_1 عدد أيام تشغيل **المنجم الأول** في الأسبوع.

x_2 عدد أيام تشغيل **المنجم الثاني** في الأسبوع.

2- تحديد دالة الهدف :

نريد **تقليل التكاليف** الإجمالية لتشغيل المنجمين:

$$Min(Z)=2000\,x_1+1600\,x_2$$

3- تحديد القيود:

نحتاج لتلبية احتياجات المصنع من الخامات:

أ - خام الدرجة:A

- ✓ **المنجم الأول ينتج 6 أطنان/يوم**
- ✓ **المنجم الثاني ينتج 2 طن/يوم**
- ✓ **الإجمالي المطلوب: 12 طن/أسبوع**

$$\mathbf{x_1+2\,x_2\geq 12}$$

ب- خام الدرجة:B

- ✓ **المنجم الأول ينتج 2 طن/يوم**
- ✓ **المنجم الثاني لا ينتج شيئًا من هذه الدرجة**
- ✓ **إجمالي المطلوب: 8 طن/أسبوع**

$$\mathbf{2\,x_1\geq 8}$$

جـ - خام الدرجة:C

- ✓ **المنجم الأول ينتج 4 أطنان/يوم**
- ✓ **المنجم الثاني ينتج 2 طن/يوم**
- ✓ **إجمالي المطلوب: 24 طن/أسبوع**

$$4\,\mathbf{x_1}+2\,\mathbf{x_2}\geq 24$$

4- القيود غير السالبة (شرط عدم السلبية):

وعليه نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد عدد الأيام في الأسبوع التي يجب تشغيل كل منجم لتلبية طلبات الشركة بأكثر الطرق الاقتصادية كما يلي :

$$\begin{cases} Min(Z)=2000\,x_1+1600\,x_2 \\ \mathbf{x_1+2\,x_2\geq 12} \\ \mathbf{2\,x_1\geq 8} \\ 4\,\mathbf{x_1}+2\,\mathbf{x_2}\geq 24 \\ \mathbf{x_1,x_2\geq 0} \end{cases}$$

تمرين رقم 14

تمارينات محلولة في مادة : أساسيات في بحوث العمليات

يجب على المزارع ببلدية عين الباردة زراعة نوعين من الأشجار (شجرة البرتقال) و (شجرة الليمون) في أرض مساحتها 4400 م²، وتحتاج كل شجرة من نوع شجرة البرتقال و الليمون إلى 40 م² على الأقل من الأرض. ومتطلبات المياه السنوية لشجرة البرتقال هي 30 وحدة ولشجرة الليمون هي 15 وحدة، بينما يتوفر ما لا يزيد عن 3300 وحدة من المياه. كما يُقدّر أن نسبة عدد أشجار الليمون إلى عدد أشجار البرتقال يجب ألا تقل عن 19/6 وألا تزيد عن 8/17. من المتوقع أن يكون العائد من كل شجرة من أشجار البرتقال 1.5 مرة من العائد من شجرة الليمون. ما يجب أن يكون عدد الأشجار من كل نوع ليتم زراعتها بحيث يكون العائد المتوقع في أقصى حد؟

حل التمرين رقم 14

1-تحديد المتغيرات:

x_1 : عدد أشجار البرتقال
x_2 : عدد أشجار الليمون

2- تحديد دالة الهدف

$$Max\ Z=1.5x_1+x_2$$

3-تحديد القيود :

أ قيد المساحة :
كل شجرة تحتاج إلى 40 م².
إجمالي الأرض: 4400 م²
لذا:

$$40\ x_1+40\ x_2 \leq 4400 \Rightarrow x_1+ x_2 \leq 110$$

ب-قيد المياه :البرتقال 30 وحدة، الليمون 15 وحدة، والمجموع لا يتعدى 3300 وحدة:

$$30\ x_1+15\ x_2 \leq 3300 \Rightarrow 2\ x_1+ x_2 \leq 220$$

ج- **نسبة عدد أشجار الليمون إلى البرتقال** يجب أن تكون بين $\frac{6}{19}$ و $\frac{17}{8}$

$$\frac{17}{8}\ x \leq y \leq \frac{6}{19}\ x \quad \Rightarrow \frac{17}{8} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{6}{19}$$

4-شرط عدم السلبية :

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث هي أعداد صحيحة

و عليه يكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي :

$$Max\ Z=1.5x_1+x_2$$

$x_1 + x_2 \leq 110$

$2x_1 + x_2 \leq 220$

$\frac{17}{8} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{6}{19}$

$x_1, x_2 \geq 0$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

تمرين رقم 15 :

يمكن للشركة ROZA الإعلان عن منتجها باستخدام محطات الراديو إذاعة عنابة الجهوية والتلفزيون عبر قناة الشروق ضمن حدود الميزانية بحيث لا يمكن أن يتجاوز الإعلان 10000 وحدة نقدية شهريًا. تكلفة كل دقيقة من إعلانات الراديو هي 50 وحدة نقدية ، وتكلفة كل دقيقة من إعلانات التلفزيون هي 1000 وحدة نقدية ، ترغب الشركة في استخدام الراديو على الأقل مرتين أكثر من التلفزيون. تظهر الخبرة السابقة أن كل دقيقة من التلفزيون تولد 25 مرة من إعلانات الراديو. صياغة نموذج البرمجة الخطية المناسب لهذه المشكلة .

حل التمرين رقم 15

1-تحديد المتغيرات:

x_1 : عدد دقائق الإعلان عبر **الراديو**
x_2 : عدد دقائق الإعلان عبر **التلفزيون**

2-تحديد دالة الهدف:

تريد الشركة تحقيق **أكبر أثر إعلاني ممكن**، ووفقًا للخبرة:

الدقيقة الواحدة على التلفزيون = 25 مرة تأثير الدقيقة الواحدة على الراديو.

إذن الأثر الكلي يمكن تمثيله بـ:

$\text{Max } (Z) = x_1 + 25\, x_2$

3-القيود:

أ-الميزانية:

تكلفة دقيقة الراديو = 50 وحدة نقدية

تكلفة دقيقة التلفزيون = 1000 وحدة نقدية

الميزانية الشهرية لا تتجاوز 10000 وحدة نقدية

$50\, x_1 + 1000\, x_2 \leq 10000$

ب- عدد دقائق الراديو على الأقل ضعف دقائق التلفزيون:

$x_1 \geq 2\ x_2$

4- شرط عدم السلبية :

$x_1, x_2 \geq 0$

و عليه يكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي :

$$\begin{cases} \text{Max } (Z) = x_1 + 25\ x_2 \\ 50\ x_1 + 1000\ x_2 \leq 10000 \\ x_1 \geq 2\ x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين رقم 16

يقوم مصنع لصنع الأحزمة الجلدية بصنع 3 أنواع من الأحزمة رجالية ونسائية و للأطفال، والتي تتم معالجتها على 3 آلات M1 و M2و .M3يتطلب الحزام الرجالي ساعتين على الآلة M1 وثلاث ساعات على الآلة .M3 يتطلب الحزام النسائي ثلاث ساعات على الآلة M1 وساعتين على الآلة M2 وساعتين على الآلة .M3يتطلب الحزام الخاص بالاطفال خمس ساعات على الآلة M2 وأربع ساعات على الآلة .M3 هناك 8 ساعات من الوقت يوميًا على الآلةM1 ، و10 ساعات يوميًا على الآلةM2 ، و15 ساعة يوميًا على الآلة .M3 الربح الناتج من الحزام الرجالي هو 3 وحدة نقدية لكل وحدة، ومن الحزام النسائي هو 5 وحدة نقدية لكل وحدة، ومن الحزام الخاص بالاطفال هو 4 وحدة نقدية لكل وحدة. ما يجب أن تكون عليه الإنتاج اليومي لكل نوع من الأحزمة حتى يكون الربح أقصى ما يمكن؟

حل التمرين رقم 16

1- تحديد المتغيرات:

x_1: عدد الأحزمة الرجالية المنتَجة يوميًا

x_2: عدد الأحزمة النسائية المنتَجة يوميًا

x_3: عدد الأحزمة الخاصة بالأطفال المنتَجة يوميًا

2- تحديد دالة الهدف :

الربح من كل حزام:

- رجالي: 3 وحدات
- نسائي: 5 وحدات
- أطفال: 4 وحدات

$$\text{Max } (Z) = 3\ x_1 + 5\ x_2 + 4\ x_3$$

3- تحديد القيود:

قيد الآلة M1:01

- رجالي: 2 ساعة
- نسائي: 3 ساعات
- أطفال: 0

$2\,x_1+3\,x_2\leq 8$

قيد الآلة M2:02

- رجالي: 0
- نسائي: 2 ساعات
- أطفال: 5 ساعات

$2\,x_2+5\,x_3\leq 10$

قيد الآلة M3: 03

- رجالي: 3 ساعات
- نسائي: 2 ساعات
- أطفال: 4 ساعات

$3x_1+2\,x_2+4\,x_3\leq 15$

4-شرط عدم السلبية :

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

و عليه يكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي :

$$\begin{cases} \text{Max } (Z)=3\,x_1+5\,x_2+4\,x_3 \\ 2\,x_1+3\,x_2\leq 8 \\ 2\,x_2+5\,x_3\leq 10 \\ 3x_1+2\,x_2+4\,x_3\leq 15 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases}$$

تمرين رقم 17

يقوم مصنع قوارب ببناء نوعين من القوارب: النوع A والنوع B القوارب التي تم بناؤها خلال شهور (جانفي– ماي) تُعرض للبيع في شهور (جويلية –ديسمبر) بربح قدره 2000 دج لكل قارب من النوع A و1500 دج لكل قارب من النوع B تلك التي تم بناؤها خلال شهور (جويلية –ديسمبر) تُعرض للبيع في شهور (جانفي– ماي) بربح قدره 4000 دج لكل قارب من النوع A و3300 دج لكل قارب من النوع B ، يتطلب كل قارب من النوع A 5 ساعات في ورشة النجارة و3 ساعات في ورشة التشطيب بينما يتطلب كل قارب من النوع B 8 ساعات في ورشة النجارة و11 ساعة في ورشة التشطيب خلال كل فترة نصف سنوية، يتوفر حد أقصى من 12000 ساعة و15000 ساعة في ورش النجارة والتشطيب على

التوالي. المواد الكافية متاحة لبناء أكثر من 3000 قارب من النوع A و3000 قارب من النوع B سنويًا. كم يجب بناء من كل نوع من القوارب خلال كل نصف عام من أجل تحقيق أقصى ربح. صغ ذلك كنموذج برمجة خطية.

حل التمرين رقم 17

1- تحديد المتغيرات:

نفرض:

X_1عدد القوارب من النوع A التي يتم إنتاجها في **النصف الأول** من السنة (جانفي – ماي)

X_2عدد القوارب من النوع B التي يتم إنتاجها في **النصف الأول** من السنة.

X_3عدد القوارب من النوع A التي يتم إنتاجها في **النصف الثاني** من السنة (جويلية – ديسمبر).

X_4عدد القوارب من النوع B التي يتم إنتاجها في **النصف الثاني** من السنة.

2- دالة الهدف (الربح الكلي):

القوارب المنتَجة في النصف الأول تُباع في النصف الثاني:

ربح القارب A: 2000 دج

ربح القارب B: 1500 دج

القوارب المنتَجة في النصف الثاني تُباع في النصف الأول من السنة التالية:

ربح القارب A: 4000 دج

ربح القارب B: 3300 دج

إذن دالة الهدف هي:

$$\text{Max } (Z)=2000X_1+1500X_2+4000X_3+3300X_4$$

3- تحديد القيود :

قيود ساعات العمل (لكل نصف سنة):

النصف الأول:

النجارة:

$$\mathbf{5X_1+8\ X_2\leq 12000}$$

التشطيب :

$$\mathbf{3X_1+11\ X_2\leq 15000}$$

النصف الثاني:

النجارة :

$$\mathbf{5X_3+8\ X_4\leq 12000}$$

التشطيب:

$$\mathbf{3X_3+11\ X_4\leq 15000}$$

قيود الإنتاج السنوي (مواد كافية لأكثر من 3000 قارب من كل نوع :

$$\mathbf{X_1+X_3\leq 3000}$$

$X_2+X_4\leq 3000$

4- شرط عدم السلبية : $X_1,X_2,X_3,X_4\geq 0$

و عليه يكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي :

$$\text{Max } (Z)=2000X_1+1500X_2+4000X_3+3300X_4$$

$$\begin{cases} 5x_1+8\,X_2 \leq 12000 \\ 3x_1+11\,X_2 \leq 15000 \\ 5X_3+8\,X_4 \leq 12000 \\ 3X_3+11\,X_4 \leq 15000 \\ X_1+X_3 \leq 3000 \\ X_2+X_4 \leq 3000 \\ X_1,X_2,X_3,X_4\geq 0 \end{cases}$$