جامعة باجي مختار –عنابة– التاريخ : 2025/4/20

كلية العلوم الاقتصاديةو التجارية وعلوم التسيير المدة : ساعة ونصف

قسم العلوم الاقتصادية مسؤولة المقياس الدكتورة امال خدادمية

السنة الثانية علوم اقتصادية

السلسلة الخامسة في مقياس اساسيات في بحوث العمليات

تمارينات حول محاضرة الحالات الخاصة في طريقة السمبلكس

إن مشكلات البرمجة الخطية عامة ويمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، لكن هناك بعض الحالات الخاصة يجب مراعاتها ومن هذه الحالات:

- ✓ حالة فساد الأصل (الإحلال) ؛
- ✓ حالة دالة الهدف غر منتهية (الحلول الغير محدودة)؛
- ✓ حالة الحل المستحيل (عدم وجود حل ملائم)؛
- ✓ حالةما لا نهاية من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

أولا : حالة فساد الأصل (الإحلال)

هذه الحالة نادرة الحدوث في التطبيقات العملية وتواجهنا عندما نحل أحد النماذج بطريقة السمبلكس ونصل إلى أحد دورات الحل فنجد أن قيمة أحد المتغيرات أو أكثر تساوي إلى الصفر في عمود bi وعندما تواجهنا مثل هذه الحالة فإن هذا يعني (لا يوجد ضمان من أن قيمة دالة الهدف سوف تتحسن فيما لو استمرينا بالحل وإنما ندخل في دوامة من الدورات دون أن تؤثر على قيمة دالة الهدف).

في بعض الأحيان قد يكون هذا الإحلال وفساد الأصل وقتياً (مرحلة معينة) أي لا يستمر في الدورات اللاحقة، ولا يمكن معرفة فيما إذا كان هذا الانحلال وقتي أم أنه دائم إلا بالاستمرار بالحل إلى أن يستوفي تطبيق شروط الأمثلية .وهذه الحالة يمكن بيانها في حالة الرسم وكذلك يمكن بيانها في حالة السمبلكس وفيما يلي المثال التالي لتوضيح الحالة باستخدام طريقة السمبلكس .

تمرين 01 :

عملت شركة بيونتيك BioNTech المتخصصة بمجال التكنولوجيا الحيوية على تطوير لقاحين لعلاج مرضى كوفيد-19 بالتعاون مع شركة فايزر الأمريكية، و ظهرت النتائج إيجابية خلال المرحلة الثالثة الحاسمة من التجارب السريرية للتأكد من فاعلية اللقاح وسلامته.هذا ما دفع مدير الانتاج إلى صياغة البرنامج الخطي الذي يضمن تحقيق أعلى الايرادات من خلال الاستعانة بالجدول الموالي :

الكمية المتاحة	اللقاح الثاني	اللقاح الأول	البيان / المواد الكيميائية
16	8	2	المادة الأولى
8	4	2	المادة الثانية
	18 ون	6 ون	أسعار اللقاح

ملاحظة : و ن = وحدة نقدية

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتعظيم الارباح.
2. حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .
3. هل يعتبر النموذج الذي صاغة هذا المدير دقيق ام لا ، وضح ذلك ؟

الحل :

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتعظيم الارباح.

$$Max\ (Z) = 6X1 + 18X2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 8X_2 \leq 16 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 8 \\ X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس

أ- ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$\text{Max } (Z) = 6X1 + 18X2 + 0\, x^e{}_3 + 0x^e{}_4$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 8X_2 + x^e{}_3 = 16 \\ 2X_1 + 4X_2 + x^e{}_4 = 8 \\ X_1 , X_2 , x_3{}^e, x^e{}_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0 \qquad x^e{}_3 = 16 \\ X_2 = 0 \qquad x^e{}_4 = 8 \end{cases}$$

ب–اعداد جدول الحل الاساسي

<u>إعداد جدول الحل الأساسي الأول</u>

ci			6	18	0	0	
Cj	**vj**	**bi**	X_1	X_2	$X^e{}_3$	$X^e{}_4$	
0	$x^e{}_3$	16	2	8	1	0	$\frac{16}{8}=2$
0	$x^e{}_4$	8	2	4	0	1	$\frac{8}{4}=2$
$Z_j = \sum C_j\, x = 0$			0	0	0	0	
$Z = C_j - Z_j$			6	18	0	0	

من الجدول أعلاه نلاحظ أن كل من $X^e{}_3$ و $X^e{}_4$ **هما متغيرات داخل الأساس** و X_2, X_1 **هي متغيرات خارج الأساس** للقيود وفي الدورة الأولى تم اختيار المتغير الداخل X_2 أما المتغير الخارج $x^e{}_3$ ويمكن أن يكون $X^e{}_4$ لأن النسبة كانت متساوية وفي مثل هذه الحالة يكون الاختيار مبدئيا عشوائي لتحديد المتغير الخارج ويمكن ملاحظة قيمة الصفر في عمود الحل $\frac{bi}{Xi}$

إعداد جدول الحل الأساسي الثاني

ci			6	18	0	0	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	X^e_4	
18	X_2	2		1		0	
0	x^e_4	0	1	0		1	0
$Z_j = \sum C_j x = 36$				18		0	
$Z = C_j - Z_j$				0		0	

أما في الدورة الثانية المتغير الداخل كان X_1 أما المتغير الخارج فهو x^e_4 لأن $bi = 0$ والمتمثلة بأصغر قيمة ممكنة، ونلاحظ استمرار بقاء القيمة الصفرية في عمود الحل $\frac{bi}{Xi}$ وأن قيمة دالة الهدف كانت كما يلي

$$Z_j = \sum C_j x = 36$$

إعداد جدول الحل الأساسي الثالث

ci			6	18	0	0
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	X^e_4
18	X_2	2	0	1		
6	X_1	0	1	0		1
$Z_j = \sum C_j x = 36$			6	18		
$Z = C_j - Z_j$			0	0		

وهو جدول الحل الأمثل لأن جميع معاملات صف $(C_j - Z_j)$ سالبة وصفرية .

3- لا يعتبر النموذج الذي صاغة هذا المدير دقيق حيث **يلاحظ أن ليس هناك فائدة في انتاج اللقاح 1 نظرا للكميات المستهلكة لانتاجه و نظرا لسعره و أن قيمة دالة الهدف** لم تتغير **36** = Z علماً بأن التوصل إلى الحل الأمثل لعدم

وجود قيم سالبة في معاملات دالة الهدف في الدورة الثانية أدى إلى دخول المتغير **X_1** كمتغير أساسي والذي لم يغير قيمة دالة الهدف ، ما يعني أن كل من **X_1** و **X_2** لهما نفس القيم وهذا ما يدل على وجود حالة خاصة هي حالة فساد الأصل (الانحلال).

ثانيا :حالة دالة الهدف غير منتهية (الحلول الغير محدودة)

المقصود **بحالة دالة الهدف الغير منتهية أو** بالحل الغير مقيد عندما تكون منطقة الحل الملائم غير محدد لذا فإن قيمة دالة الهدف يمكن أن تزداد إلى ما لا نهاية ولا يمكن الوصول إلى الحل الأمثل وكما هو موضح في المثال التالي:

مثال :

ترغب مديرة مصنع valentina للجلود في انتاج نوعين من حقائب اليد النسائية (حقيبة ممتازة وحقيبة عادية) بسعر منافس للانواع المماثلة في السوق ، وبعد دراسة جيدة لمراحل إنتاج هذه الحقائب اتضح أن انتاج الحقيبة الواحدة من كل نوع يتطلب المرور بمرحلتين ، حيث كان الوقت اللازم لانتاج كل نوع في كل مرحلة و الطاقة المتاحة و المتوفرة بالساعة موضحة في الجدول الموالي :

المنتجات / الأقسام	الحقيبة الممتازة	الحقيبة العادية	الطاقة المتوفرة
مرحلة الخياطة		**0**	**2 سا على الأقل**
مرحلة التشطيب			**5 سا عى الأكثر**
الأسعار	**2**		

المطلوب :

1. و باعتبارك مديرا للانتاج قم بصياغة نموذج البرمجةالخطية الذي يسمح بذلك بتعظيم الأرباح +
2. حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .
3. هل النموذج الذي صاغه مدير الانتاج دقيق ؟

<u>الحل :</u>

1− صياغة نموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max } (Z) = 2X_1 + X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \geq 2 \\ X_2 \leq 5 \\ X_1 \, , \, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2− حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

أ− ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$\text{Max}(Z) = 2X_1 + 1X_2 + 0\,x^e_3 + 0x^e_4 - M\,a_5$$

$$\begin{cases} 1X_1 + 0X_2 - x^e_3 + a_5 = 2 \\ 0X_1 + 1X_2 + x^e_4 = 5 \\ X_1 , X_2 , x_3^e , x^e_4 \geq 0 \end{cases}$$

ب−اعداد جدول السمبلكس :

جدول الحل الأساسي الأول :

ci			2	1	0	0	−M	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	$\cancel{a_5}$	
−M	a_5	2	1	0	1−	0	$\cancel{1}$	2
0	x^e_4	5	0	1	0	1	$\cancel{0}$	حالة عدم تعيين
$Z_j = \sum C_j\, x = -2\,M$			− M	0	M	0	$\cancel{-M}$	
$Z = C_j - Z_j$			2+ M	1	−M	0	$\cancel{0}$	

جدول الحل الأساسي الثاني :

ci			2	1	0	0	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	
2	X_1	2	1	0	1−	0	
0	x^e_4	5	0	1	0	1	
$Z_j = \sum C_j\, x = 4$			2	0	2−	0	
$Z = C_j - Z_j$			0	1	2	0	

وبما أن X^e_3 تقابل أكبر معامل موجب في صف $(C_j - Z_j)$ فبالتأكيد سيكون هو المتغير الداخل لكن كل المعاملات تحت عمود X^e_3 هي سالبة وصفرية هذا يعني أن X^e_3 تزداد بشكل غير محدود وبدون التأثير على القيود الأخرى ، حيث أن أي زيادة بمقدار وحدة واحدة تؤثر على دالة الهدف بنفس الزيادة هذا يعني أن أي زيادة في المالانهاية من X^e_3 تؤدي إلى زيادة غير محددة بالنسبة إلى Z ، لذا فأن المسألة ليس لها حل محدود ومنها نستنتج أن هناك متغير داخل لكن لا وجود للمتغير الخارج ، حتى وإن حسنا الحل بالنسبة إلى المتغير الثاني X_2 فنحصل على نفس حصيلة الجدول الثاني

2- النموذج الذي صاغه مدير الانتاج غير دقيق لوجود حالة خاصة هي حالة دالة الهدف غير منتهية حيث تحدد المتغير الذي يدخل للأساس وهو X^e_3 غير أنّ جميع معاملات عمود الارتكاز سالبة و صفرية مما يعيق تحديد المتغير الخارج من الأساس .

ثالثا :حالة الحل المستحيل (عدم وجود حل ملائم)

تحدث هذه الحالة في المسائل التي قيودها لا تحدد منطقة حل موحدة أي عدم تشارك القيود في مجال الحل وهذا بسبب في أن يكون مجال الحل فارغ ولا يمكن الوصول إلى حل ملائم لمثل هذه النماذج الرياضية ، ويمكن الكشف عن هذه الحالة حين يتم التوصل الى جدول الحل الأمثل مع بقاء المتغير الاصطناعي في الاساس .

تمرين :

تنتج شركة الوفاء نوعين من المنتجات ، و يحتاج كل منتج إلى نوعين من المدخلات هي : مواد خام و يد عاملة ، ويوضح الجدول الموالي احتياجات وحدة المنتج من مدخلات الانتاج و الانتاجية لكل مدخل و الربح المتوقع لكل منها .

المنتجات / المدخلات	المنتج 1	المنتج 2	كمية المدخلات المتاحة
مواد خام	**4**	**2**	**4 كحد أقصى**
يد عاملة	**6**	**8**	**24 كحد أدنى**
الربح المتوقع	**6**	**4**	

المطلوب :

1. و باعتبارك مديرا للانتاج قم بصياغة نموذج البرمجةالخطية الذي يسمح بذلك بتعظيم الأرباح +

2. حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

3. هل هناك حالة خاصة ؟ وضح ذلك

الحل :

1− صياغة نموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max}\ (Z) = 6X_1 + 4X_2$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ 6X_1 + 8X_2 \geq 24 \\ X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2− حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

أ− ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات.

$$\text{Max}\ (Z) = 6X_1 + 4X_2 + 0x^e_3 + 0\,x^e_4 - M\,a_5$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + x^e_3 = 4 \\ 6X_1 + 8X_2 - x^e_4 + a_5 = 24 \\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ x^e_3\ ,\ x^e_4 \geq 0 \end{cases}$$

ب – اعداد جدول السميلكس

جدول الحل الأساسي الأول :

ci			6	4	0	0	−M	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	a_5	
0	X^e_3	4	4	2	1	0	0	2
−M	a_5	24	6	8	0	1−	1	3
$Z_j = \sum C_j\, x = -24M$			− 6M	−8M	0	M	−M	
$Z = C_j - Z_j$			6+6M	4+8M	0	−M	0	

X_2 يدخل للأساس

X^e_3 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثاني:

ci			6	4	0	0	−M
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	a_5
4	X_2	2	2	1		0	0
−M	a_5	8	−10	0	−4	−1	1
$Z_j = \sum C_j\, x = 8-8M$			8+10 M	4	2+4M	M	−M
$Z = C_j - Z_j$			−2−10M	0	−2−4M	−M	0

حيث توصلنا الى جدول الحل الأمثل مع بقاء المتغير الاصطناعي a_5 في الأساس

رابعا : حالة ما لا نهاية من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

تحدث هذه الحالة عندما تكون معادلة دالة الهدف موازية لأحد قيود المسألة الذي يسهم في تحديد منطقة الحل ويحصل من ذلك أكثر من قيمة في منطقة الحل لها نفس الارتفاع مقارنة بمعادلة دالة الهدف، أي سوف يكون هناك أكثر من حل أمثل جميعها تعطي نفس قيمة دالة الهدف لكن قيمة المتغيرات تختلف في كل حل من هذه الحلول.

تمرين :

تخطط شركة الشروق للإعلانات وضع برنامج للإعلان عن منتج جيد لأحد عملائها و أمام الشركة ثلاثة وسائل للإعلان عن المنتج هي : الصّحف و المجلات ، الاذاعة ،التلفزيون و الجدول الموالي يوضح تكلفة الاعلان الواحد في كل وسيلة من هذه الوسائل و عدد الاشخاص (بالمليون) الذين يصلهم الاعلان الواحد (تحت و فوق 30 عام) شهريا

	تكلفة الاعلان بالمليون دينار جزائري	عدد الاشخاص تحت سن 30 عاما	عدد الاشخاص فوق سن 30 عاما
الصحف والمجلات	2	3	1
الاذاعة	6	4	3
التلفزيون	4	1	2

وتهدف الشركة الى تحقيق الاهداف التالية :

- ✓ أن يقل عدد الاشخاص تحت 30 عاما الذين يصلهم الاعلان عن المنتج في الشهر عن 3600 مليون شحص.
- ✓ لايزيد عدد الاشخاص فوق 30 عاما الذين يصلهم الاعلان عن المنتج في الشهر عن 2100 مليون شخص .
- ✓ تكلفة الاعلان عبر الصحف و المجلات لا يقل عن 500 مليون دينار جزائري .
- ✓ تكلفة الاعلان عبر الاذاعة لا يقل عن 400 مليون دينار جزائري .

المطلوب :

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح لهذه الشركة بتفليل نكاليفها و حله باستخدام طريقة السمبلكس .
2. هل هناك حالة خاصة وضح ذلك ؟

الحل :

المتغيرات القرارية

- عدد مرات الاعلان بالصحف و المجلات في الشهر هو X_1
- عدد مرات الاعلان بالاذاعة في الشهر هو X_2
- عدد مرات الاعلان بالتليفزيون في الشهر هو X_3

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية وحله باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 6X_2 + 4X_3 \quad \text{دالة الهدف}$$

subject to:

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 3600 \\ 1X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 2100 \\ X_1 \geq 500 \\ X_2 \geq 400 \\ \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

1-1- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

1-1-1 ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$\begin{cases} Min\,(Z) = 2X_1 + 6X_2 + 4X_3 + 0\,x^e_4 + 0x^e_5 + 0x^e_6 + 0x^e_7 + Ma_8 + Ma_9 + Ma_{10} \\ 3X_1 + 4X_2 + X_3 + x^e_4 = 3600 \\ 1X_1 + 3X_2 + 2X_3 - x^e_5 + a_8 = 2100 \\ X_1 - x^e_6 + a_9 = 500 \\ X_2 - x^e_7 + a_{10} = 400 \\ X_1, X_2, x_3, x^e_4, x^e_5, x^e_6, x^e_7, a_8, a_9, a_{10} \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\,(Z) = -\ MAX(Z) = -2X_1 - 6X_2 - 4X_3 - 0\,x^e_4 - 0x^e_5 - 0x^e_6 - 0x^e_7 - Ma_8 - Ma_9 - Ma_{10}$$

2−1−1 – اعداد جدول السميلكس

جدول الحل الأساسي الأول :

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0	−M	−M	−M	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	a_8	a_9	a_{10}	
0	x^e_4	3600	3	4	1	1	0	0	0	0	0	0	900
−M	a_8	2100	1	3	2	0	−1	0	0	1	0	0	700
−M	a_9	500	1	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	X
−M	a_{10}	400	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	1	400
$Z_j = \sum C_j\, x = -3000$ M			−2 M	−4 M	−2 M	0	M	M	M	−M	−M	−M	
$Z = C_j - Z_j$			−2+2 M	−6+4 M	−4+2 M	0	−M	−M	−M	0	0	0	

عنصر الارتكاز هو 1

X_2 يدخل للأساس

a_{10} يخرج من الأساس و بما أن المتغير a_{10} خرج من الأساس يتم تشطيب عموده ولا يظهر في الجدول الموالي

جدول الحل الأساسي الثاني:

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0	−M	−M	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	$\cancel{a_8}$	a_9	
0	x^e_4	2000	3	0	1	1	0	0	4	0	0	500
−M	a_8	900	1	0	2	0	−1	0	3	1	0	300
−M	a_9	500	1	0	0	0	0	−1	0	0	1	X
−6	X_2	400	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	X
$Z_j = \sum C_j x = -2400-1400M$			−2 M	−6	−2M	0	M	M	6−3M	−M	−M	
$Z = C_j - Z_j$			−2+2M	0	−4+2M	0	−M	−M	−6+3M	0	0	

عنصر الارتكاز هو 3

x^e_7 يدخل للأساس a_8 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثالث

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0	−M	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	a_9	
0	x^e_4	800		0		1		0	0	0	480
0	x^e_7	300		0		0		0	1	0	900
−M	a_9	500	1	0	0	0	0	−1	0	1	500
−6	X_2	700		1		0		0	0	0	2100
$Z_j = \sum C_j x = -500M-4200$			−M−2	−6	−4	0	2	M	0	0	
$Z = C_j - Z_j$			M	0	0	0	−2	−M	0	0	

عنصر الارتكاز هو $\frac{5}{3}$

X_1 يدخل للأساس $\qquad\qquad$ x^e_4 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الرابع :

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0	−M	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	a_9	
−2	X_1	480	1	0	1−			0	0	0	X
0	x^e_7	140	0	0	1			0	1	0	140
−M	a_9	20	0	0	1			1−	0	1	20
−6	X_2	540	0	1	1			0	0	0	540
$Z_j=\sum C_j\, x = -4200-$ 20M			−2	−6	−4− M		2+ $\frac{4}{5}$ M				
$Z=C_j-Z_j$			0	0	M		−2	M−	0	0	

عنصر الارتكاز هو 1

X_3 يدخل للأساس $\qquad\qquad$ a_9 يخرج من الأساس

و بما أن المتغير a_9 خرج من الأساس يتم تشطيب عموده و لا يظهر في الجدول الموالي

جدول الحل الاساسي الخامس:S1

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0	
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	
−2	X_1	500	1	0	0	0	0	−1	0	X
0	x^e_7	120	0	0	0			1	1	300
−4	X_3	20	0	0	1			−1	0	X
−6	X_2	520	0	1	0			1	0	1300
$Z_j=\sum C_j\, x = 4200$			−2	−6	−4	0	2	0	0	

$Z = C_j - Z_j$	0	0	0	0	−2	0	0	

توصلنا إلى جدول الحل الأمثل مع وجود حالة خاصة هي حالة مالا نهاية من الحلول المثلى حيث أن معاملي $C_J - Z_J$ للمتغيرين x^e_4 و x^e_6 (متغيرين خارج الأساس) معدومين و للبحث عن الحلول المثلى الأخرى نحسب الحل الأساسي السادس بادخال احدى المتغيرين x^e_4 أو x^e_6 في الأساس .

جدول الحل الأساسي السادس: S2

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7
−2	X_1	500	1	0	0	0	0	1−	0
0	x^e_4	300	0	0	0	1			
−4	X_3	200	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$ −		
−6	X_2	400	0	1	0	0	0	0	1−
$Z_j = \sum C_j\, x = 4200$			−2	−6	−4	0	2	0	0
$Z = C_j - Z_j$			0	0	0	0	−2	0	0

يمكن ايجاد باقي الحلول المثلى من خلال مايلي :

$$\lambda S_1 + (1-\lambda)\, S_2$$

حيث : $1 \leq \lambda \leq 0$ لكل قيمة λ بين 0 و 1 يقابلها حل أمثل (Z=4200)

مثلا إذا اخترنا $\lambda = 0.5$ نجد :

	S1	S2	S3 λ =0.5
X_1	500	500	500
X_2	520	400	460
X_3	20	200	110
X^e_4	0	300	150
X^e_5	0	0	0
X^e_6	0	0	0
X^e_7	120	0	60
Z	4200	4200	4200