السلسلة السابعة:

التمرين1:

في سوق احتكار قلة توجد 3 مؤسسات تشكل كارتل، دوال التكاليف الكلية لكل مؤسسة منهم بالشكل التالي:

$$CT_1 = 3x_1^2 + 6x_1 + 2$$

$$CT_2 = 2x_2^2 - 14x_2 + 5$$

$$CT_3 = x_3^2 + 8x_3 + 1$$

وإذا كانت دالة طلب هذا السوق من الشكل: $P = 68 - 4(x_1 + x_2 + x_3)$

المطلوب:

1- إذا كان السعي لتعظيم ربح الكارتل ككل، حدد الكمية التي يجب أن تنتجها كل مؤسسة؟

2- أحسب سعر التوازن؟

3- أحسب ربح الكارتل؟

التمرين 2:

إذا كانت دالة طلب سوق يتميز باحتكار قلة بين 3 مؤسسات هي من الشكل التالي: $P = 80 - 6X$

حيث: $(X = x_1 + x_2 + x_3)$

ودوال التكلفة الكلية لهذه المؤسسات هي من الشكل التالي:

$$CT_1 = 2x_1 + 4$$

$$CT_2 = 5x_2 + 5$$

$$CT_3 = 3x_3 + 6$$

إذا كانت المؤسسة الأولى هي القائدة في السعر وكميتها المتفق عليها هي ضعف كل من الكمية الخاصة بالمؤسسة الثانية وكذلك ضعف الكمية الخاصة بالمؤسسة الثالثة.

المطلوب:

1- حدد كمية كل مؤسسة في هذا السوق عند التوازن؟

2- حدد سعر توازن السوق؟

حل التمرين 1:

1- تحديد الكمية التي يجب أن تنتجها كل مؤسسة في الكارتل:

شرط توازن الكارتل: $Rmg = Cmg_1 = Cmg_2 = Cmg_3$

دالة الربح الكلي هي:

$$\pi = RT - (CT_1 + CT_2 + CT_3) = PX - (CT_1 + CT_2 + CT_3) = P(x_1 + x_2 + x_3) - (CT_1 + CT_2 + CT_3)$$

$$\pi = [68 - 4(x_1 + x_2 + x_3)](x_1 + x_2 + x_3) - [(3x_1^2 + 6x_1 + 2) + (2x_2^2 - 14x_2 + 5) + (x_3^2 + 8x_3 + 1)]$$

$$\pi = [68x_1 + 68x_2 + 68x_3 - 4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3] - [3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1 - 14X_2 + 8x_3 + 8]$$

$$\pi = 68x_1 + 68x_2 + 68x_3 - 4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 6x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 8$$

$$\boldsymbol{\pi = -7x_1^2 - 6x_2^2 - 5x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 + 62x_1 + 82x_2 + 60x_3 - 8}$$

تعظيم الربح وذلك بإيجاد المشتقات الجزئية الأولى ومساواتها بالصفر:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = -14x_1 - 8x_2 - 8x_3 + 62 = 0 \ldots..(1) \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = -8x_1 - 12x_2 - 8x_3 + 82 = 0 \ldots\ldots(2) \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_3} = -8x_1 - 8x_2 - 10x_3 + 60 = 0 \ldots..(3) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نجد:

$$6x_1 - 4x_2 + 20 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{20 + 6x_1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = 5 + 1.5x_1} \ldots\ldots\ldots (4)$$

بتعويض (4) في (3) نجد:

$$-8x_1 - 8x_2 - 10x_3 + 60 = 0 \Rightarrow -8x_1 - 8(5 + 1.5x_1) - 10x_3 + 60 = 0$$

$$\Rightarrow -8x_1 - 40 - 12x_1 - 10x_3 + 60 = 0 \Rightarrow -20x_1 - 10x_3 + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{20 - 20x_1}{10} \Rightarrow \boldsymbol{x_3 = 2 - 2x_1} \ldots\ldots\ldots (5)$$

بتعويض (4) و (5) في (1) نجد:

$$-14x_1 - 8x_2 - 8x_3 + 62 = 0 \Rightarrow -14x_1 - 8(5 + 1.5x_1) - 8(2 - 2x_1) + 62 = 0$$

$$\Rightarrow -14x_1 - 40 - 12x_1 - 16 + 16x_1 + 62 = 0 \Rightarrow -10x_1 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_1 = \frac{6}{10} = 0.6}$$ كمية توازن المؤسسة1

$\boldsymbol{x_2 = 5 + 1.5x_1} \Rightarrow x_2 = 5 + 1.5(0.6) \Rightarrow \boxed{\bar{x}_2 = 5.9}$ كمية توازن المؤسسة2

$\boldsymbol{x_3 = 2 - 2x_1} \Rightarrow x_3 = 2 - 2(0.6) \Rightarrow \boxed{\bar{x}_3 = 0.8}$ كمية توازن المؤسسة3

ويمكن استخدام طريقة كرامر في الحل كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x_1} = -14\ x_1 - 8\ x_2 - 8\ x_3 + 62 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = -8\ x_1 - 12\ x_2 - 8\ x_3 + 82 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_3} = -8\ x_1 - 8\ x_2 - 10\ x_3 + 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 62 = 14\ x_1 + 8\ x_2 + 8\ x_3 \\ 82 = 8\ x_1 + 12\ x_2 + 8\ x_3 \\ 60 = 8\ x_1 + 8\ x_2 + 10\ x_3 \end{cases}$$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 14 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 8 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} = 784 - 128 - 256 = \mathbf{400}$$

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 62 & 8 & 8 \\ 82 & 12 & 8 \\ 60 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 62\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 82\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} = 3472 - 1312 - 1920 = \mathbf{240}$$

$$X_1 = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} = \frac{240}{400} \Rightarrow \boxed{\overline{X}_1 = 0.6}$$ **كمية توازن المؤسسة1**

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 14 & 62 & 8 \\ 8 & 82 & 8 \\ 8 & 60 & 10 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 82 & 8 \\ 60 & 10 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 62 & 8 \\ 60 & 10 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 62 & 8 \\ 82 & 8 \end{vmatrix} = 4760 - 1120 - 1280 = \mathbf{2360}$$

$$X_2 = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|} = \frac{2360}{400} \Rightarrow \boxed{\overline{X}_2 = 5.9}$$ **كمية توازن المؤسسة2**

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 14 & 8 & 62 \\ 8 & 12 & 82 \\ 8 & 8 & 60 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 12 & 82 \\ 8 & 60 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 8 & 62 \\ 8 & 60 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 8 & 62 \\ 12 & 82 \end{vmatrix} = 896 + 128 - 704 = \mathbf{320}$$

$$X_3 = \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|} = \frac{320}{400} \Rightarrow \boxed{\overline{X}_3 = 0.8}$$ **كمية توازن المؤسسة3**

2- <u>حساب سعر التوازن:</u>

$$P = 68 - 4\,(X_1 + X_2 + X_3) = 68 - 4(0.6 + 5.9 + 0.8) \Rightarrow \boxed{\overline{P} = 38.8}$$ **سعر التوازن**

3- <u>حساب ربح الكارتل:</u>

$$\pi = -7\,x_1^2 - 6\,x_2^2 - 5\,x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 + 62\,x_1 + 82\,x_2 + 60x_3 - 8$$

$$\pi = -7\,(0.6)^2 - 6\,(5.9)^2 - 5\,(0.8)^2 - 8(0.6)(5.9) - 8(0.6)(0.8) - 8(5.9)(0.8) + 62\,(0.6) + 82\,(5.9) + 60\,(0.8) - 8$$

$$\boxed{\pi = 276.5}$$

حل التمرين 2:

1- تحديد كمية كل مؤسسة في هذا السوق عند التوازن:

لدينا: $x_1 = 2x_2 = 2x_3$ ومنه:

$$P = 80 - 6X = 80 - 6(x_1 + x_2 + x_3) = 80 - 6(x_1 + 0{,}5\,x_1 + 0{,}5\,x_1)$$

$$P = 80 - 6\,(2x_1)$$

$$\pi_1 = RT_1 - CT_1 = [80 - 6\,(2x_1)]\,x_1 - (2x_1 + 4) = 80x_1 - 12x_1^2 - 2x_1 - 4$$

$$\boldsymbol{\pi_1 = -12x_1^2 + 78x_1 - 4}$$

$$\frac{\partial \pi 1}{\partial x1} = -24x_1 + 78 = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{x}_1 = \frac{78}{24} = 3.25}$$ **كمية توازن المؤسسة 1**

وحينها يتم تحديد الكميات الأخرى مباشرة:

$$x_2 = x_3 = \frac{x_1}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{x}_2 = \overline{x}_2 = \frac{3.25}{2} = 1.625}$$

2- تحديد سعر توازن السوق:

$$P = 80 - 6\,(2x_1) = 80 - 6\,(2.\,3{,}25) \Rightarrow \boxed{\overline{P} = 41}$$