عنوان الدرس : المسألة المعكوسة (النموذج المقابل)

تمهيد:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية الثنائية والتي تعرف بتحوير نموذج البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائية. ويختص النموذج الثنائي بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات وإتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته وحله، وتستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية.(Sensitivity Analysis)

أولا: تعريف النموذج الثنائي (المقابل)

يعرف النموذج الثنائي بأنه النموذج المائل للنموذج الأولي لصياغة مسائل البرمجة الخطية. ويرمز النموذج الثنائي الكثير من المعلومات التي يمكن أن تفيد إدارة العمليات الصناعية في سهولة اتخاذ القرارات، بالإضافة إلى تقليل العمليات الحسابية التي أصبحت سهلة بواسطة الحاسوب وتحتاج إلى وقت أقل في حالة توفر عدد كبير من القيود والمتغيرات عنها في النموذج الأول. حيث يقترن أي نموذج أصلي (*Primal*)عادة بنموذج آخر يطلق عليه النموذج المرافق (*Dual*) المقابل/الثنائي)[1].

ثانيا: أهمية النموذج الثنائي:

تتمثل أهمية الثنائية في مسائل البرمجة الخطية فيما يلي:

- ✓ حل مشكلة البرمجة الخطية ومن خلال المشكلة الثنائية)النموذج المقابل(قد يكون اسهل من حلها من خلال المشكلة الاولية (عندما يكون من الممكن اختصار عدد القيود في المشكلة الثنائية)؛
- ✓ يعيد النموذج الثنائي) المقابل) أثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الايمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الامثل؛
- ✓ يعطي النموذج الثنائي)المقابل) كثيرا من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل؛

– [1]منعم زمزير الموسوي، : (2009) **بحوث العمليات–مدخل علمي لاتخاذ القرارات**–، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، ص .152

- ✓ تقليص الجهد الحسابي المطلوب في تحليل مسألة البرمجة الخطية التي تحتوي على عدد كبير من القيود وهذا له فوائد كبيرة في استخدامات وتطبيقات متعددة؛
- ✓ تشير الثنائية في البرمجة الخطية إلى إن كل برنامج خطي مكافئ إلى مباراة بين شخصين ذات مجموع صفري وهذا يؤكد وجود علاقة بين طريقة البرمجة الخطية ونظرية المباراة ؛
- ✓ بإمكان الحصول على الحل الأمثل للمسألة الثنائية من جدول الحل الأمثل الأولية مباشرة والعكس صحيح ولعل من المفيد اختيار المسألة التي تحتوي عدد قليل من القيود والتي تعتبر ملائمة أكثر للحسابات التكرارية أو بالنسبة للبرامج الجاهزة في الكومبيوتر؛
- ✓ إذا كان ألحد متغيرات النموذج الأول قيمة سالبة فتن حل النموذج هذا غير ممكن بينما في حالة النموذج المقابل يمكن إيجاد حل للمشكلة عند وجود متغير ذي قيمة سالبة.

ثالثا: الخطوات العامة لتكوين المشكلة الثنائية (النموذج الثنائي المقابل)

- ✓ يتمّ تحديد متغير بديل غير سالب لكل قيد من قيود المشكلة الاولية ؛
- ✓ معاملات دالة الهدف في المشكلة الاولية تصبح ثوابت الطرف الايمن لقيود المسالة الثنائية؛ ثوابت الطرف الايمن في المشكلة الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية؛
- ✓ تغيير ترميز المتغيرات من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل ($x_1 \ldots x_n$) تصبح ($y_1 \ldots y_n$). و بناء على ذلك يصبح عدد متغيرات النموذج الثنائي مساويا لعدد قيود البرنامج الأولي؛
- ✓ تعكس اتجاه القيود في المشكلة الثنائية الى الاتجاه الاخر عندما كانت عليه القيود في المشكلة الاولية فاذا كانت القيود مثلا من نوع أكبر او يساوي في المشكلة الاولية فإنها تعكس في المسالة الثنائية الى أقل او يساوي والعكس صحيح؛

- ✓ يعكس اتجاه دالة الهدف فإذا كانت تعظيم Max دالة الهدف في احد النموذجين فيقلب الى تصغير في النموذج الاخر او بالعكس كما يلي:

$$\begin{cases} Max\ Z = C'x \\ s/c \quad Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Min\ W = b'y \\ s/c \quad A'y \geq C \\ y \geq 0 \end{cases}$$

رابعا: القواعد الأساسية لتشكيل النموذج الثنائي:

النموذج الأصلي) الاولي(*Primal*)	النموذج) المقابل(*Dual*)
دالة الهدف	**دالة الهدف**
Max Z	***Min W***
Min Z	***Max W***
الطرف الأيمن) الثاني (للقيود	معاملات دالة الهدف
معاملات دالة الهدف	الطرف الأيمن) الثاني (للقيود
المتغيرات	**القيود**
عدد المتغيرات	عدد القيود
$x_j \geq 0$	القيد j متراجحة) من الشكل اكبر أو يساوي($\geq$
$x_j \leq 0$	القيد j متراجحة) من الشكل اقل أو يساوي($\leq$
x_j غير محدد الإشارة	القيد j معادلة) من الشكل(=
القيود	**المتغيرات**
عدد القيود	عدد المتغيرات
القيد i معادلة) من الشكل(=	Y_iغير محدد الإشارة
القيد i متراجحة (من الشكل اقل أو يساوي($\leq$	$y_i \geq 0$
القيد i متراجحة) من الشكل اكبر أو يساوي($\geq$	$y_i \leq 0$
القيد i متراجحة) من الشكل اكبر أو يساوي ($\geq$ بالضرب في (-1) تصبح اقل أو يساوي) $\leq$	$y_i \geq 0$

أمثلة حول تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج المرافق حسب معايير الجدول أعلاه:

مثال 01 : حالة دالة الهدف Max Z و جميع القيود من الشكل)اقل أو يساوي (≤

التالي ليكن نموذج البرمجة الخطية:

$$Max\ Z = 400\,x_1 + 500\,x_2 + 800\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3 \leq 2000 \\ 6x_1+1x_2+6x_3 \leq 4000 \\ 4x_1+5x_2+3x_3 \leq 6000 \\ 7x_1+8x_2+2x_3 \leq 1500 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات و التي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$Min\ W = 2000\,y_1 + 4000\,y_2 + 6000\,y_3 + 1500\,y_4$$

حيث تمثل (y_1, y_2, y_3, y_4) أسعار المواد الأولية.

أما القيود فتصبح من الشكل:

$$\begin{cases} 3y_1+6y_2+4y_3+7y_4 \geq 400 \\ 3y_1+1y_2+5y_3+8\,y_4 \geq 500 \\ 4y_1+6y_2+3y_3+2\,y_4 \geq 8\,00 \end{cases}$$

و عليه فإن النموذج الثنائي أو المقابل للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$Min\ W = 2000\,y_1 + 4000\,y_2 + 6000\,y_3 + 1500\,y_4$$

$$\begin{cases} 3y_1+ 6y_2 + 4y_3+7y_4 \geq 400 \\ 3y_1+1y_2 +5y_3+8\, y_4 \geq 500 \\ 4y_1+6y_2 +3y_3 \ +2\, y_4 \geq 8\,00 \end{cases}$$

$y_1, y_2, y_3 , y_4 \geq 0$

مثال : 02 حالة دالة الهدف *Max Z* مع ظهور القيد *i* بإشارة أكبر أو يساوي≥

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$Max\ Z = 10\, x_1+20\, x_2 +30x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2 +5x_3 \leq 200 \\ 2x_1+3x_2 +2x_3 \geq 250 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

يلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذا وجب تحويله إلى متراجحة أقل أو تساوي بضرب طرفيها في القيمة (−1)، فيصبح من الشكل:

$-2x_1-3x_2 -2x_3 \leq -250$

و عليه يصبح النموذج الثنائي كالتالي:

Min W = $200\, y_1-250\, y_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4y_1 - 2y_2 \geq 10 \\ 2y_1 - 3y_2 \geq 20 \\ 5y_1 - 2y_2 \geq 30 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال :03 حالة دالة الهدف *Max Z* مع ظهور القيد *i* بإشارة تساوي=

:الخطية التالي ليكن لدينا نموذج البرمجة

$$\begin{cases} Max\ Z = 280\,x_1 + 450\,x_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ 10x_1 + 15x_2 \leq 140 \\ 15\,x_1 + 20\,x_2 = 150 \end{cases}$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0$$

يلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه كونه مكتوبا في صورة معادلة، لذا وجب تحويله إلى متراجحتين إحداهما أقل أو تساوي و الأخرى أكبر أو تساوي، فيصبح:

$$15x_1 + 20x_2 \leq 150$$

$$15x_1 + 20x_2 \geq 150$$

قبل الانتقال الى النموذج المقابل لابد من التأكد من أنّ جميع إشارات القيود تحقق شرط الشكل النموذجي و بما أن المتراجحة الثانية تحقق هي الأخرى شرط الشكل النموذجي لنموذج التعظيم فيجب هي الأخرى تعديلها و ذلك بضرب طرفيها في (-1) لتصبح من الشكل :

$$-15x_1 - 20\,x_2 \leq -150$$

و بناءا على ذلك يصبح الشكل النموذجي للنموذج الأولي كما يلي:

Max Z = 280 x_1+ 450 x_2

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 \leq 140 \\ 15x_1 + 20x_2 \leq 150 \\ -15x_1 - 20x_2 \leq -150 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و عليه يمكن استنتاج النموذج الثنائي للنموذج أعلاه، فيكون كما يلي:

Min W = $140\ y_1 + 150y'_2 - 150\ y''_2$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 10\ y_1 + 15\ y'_2 - 15\ y''_2 \geq 280 \\ 15\ y_1 + 20\ y'_2 - 20\ y''_2 \geq 450 \\ y_1,\ y'_2,\ y''_2 \geq 0 \end{cases}$$

Min W = $140\ y_1\ 150 \quad + \quad (y'_2 - y''_2)$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10y_1 + 15(y'_2 - y''_2) \geq 280 \\ 15y_1 + 20(y'_2 - y''_2) \geq 450 \\ y_1,\ y'_2,\ y''_2 \geq 0 \end{cases}$$

ما يلاحظ أن النموذج المقابل يحتوي على 3 متغيرات في حين أنه من المفروض وجود متغيرتين فقط باعتبار أن النموذج الأصلي يحتوي على قيدين فقط، لذلك وجب علينا تعديل البرنامج المرافق و ذلك بوضع:

$$y'_2 - y''_2 = y_2$$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج المرافق كما يلي :

Min $W = 140\ y_1\ \ 150 \quad + \quad y_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10y_1 + 15\ y_2 \geq 280 \\ 15y_1 + 20y_2 \geq 450 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \in R \end{cases}$$

و وفقا لذلك قد تكون:

$y_2 > 0$ إذا كانت : $y'_2 > y''_2$

$y_2 < 0$ إذا كانت : $y'_2 < y''_2$

$y'_2 = y''$ إذا كانت: $y_2 = 0$

مثال :04 حالة دالة الهدف *Max Z* مع ظهور متغيرة j غير محددة الاشارة *(x_j ∈R)*

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

Max $Z = 6\ x_1 + 3\ x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 300 \\ 3x_1 + 1\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \in R,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ما يلاحظ من النموذج أعلاه أنه ليس في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى غير محددة الإشارة لذا وجب تعديله، بتعويض المتغيرة الأولى بفرق متغيرتين(($x_1 = x'_1 - x''_1$ ، ليصبح كما يلي:

Max Z = $6\,(\mathbf{x'_1} - \mathbf{x''_1}) + 3\,x_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4(\mathbf{x'_1} - \mathbf{x''_1}) + 2x_2 \leq 200 \\ 4(\mathbf{x'_1} - \mathbf{x''_1}) + 3x_2 \leq 300 \\ 3(\mathbf{x'_1} - \mathbf{x''_1}) + 1x_2 \leq 400 \\ \mathbf{x'_1},\ \mathbf{x''_1},\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Max Z = $6\,\mathbf{x'_1} - \mathbf{6\,x''_1} + 3\,x_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4\mathbf{x'_1} - \mathbf{4\,x''_1} + 2x_2 \leq 200 \\ 4\mathbf{x'_1} - \mathbf{4\,x''_1} + 3x_2 \leq 300 \\ 3\mathbf{x'_1} - \mathbf{3\,x''_1} + 1x_2 \leq 400 \\ \mathbf{x'_1},\ \mathbf{x''_1},\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و عليه يصبح شكل النموذج الثنائي للنموذج الأولي أعلاه كما يلي:

Min W = $200\,y_1 + 300y_{\mathbf{2}} + {}'400y_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 6 \\ -4y_1 - 4y_2 - 3y_3 \geq -6 \\ 2y_1 + 3\mathbf{y_2} + 1y_3 \geq 3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

يجب أن تكون مساوية لعدد قيود النموذج سبق و أن تمت الإشارة إلى أن عدد متغيرات النموذج الأولي لذا وجب علينا تعديله بضرب القيد الثاني في (-1)، و ذلك المرافق، و هذا ما لا يحققه النموذج أعلاه، و الثاني في شكل مساواة، فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي بغية كتابة القيدين الأول:

$$\text{Min } W = 200\,y_1 + 300y_2 + '400y_3$$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 6 \\ 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq 6 \\ 2y_1 + 3\mathbf{y_2} + 1y_3 \geq 3 \\ \quad y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يصبح النموذج المقابل كما يلي:

$$\begin{cases} \text{Min } W = 200\,y_1 + 300y_2 + '400y_3 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 6 \\ 2y_1 + 3\mathbf{y_2} + 1y_3 \geq 3 \\ \quad y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

وعليه فإن ظهور المتغيرة رقم *j* غير محددة الإشارة *R) (y_i Î* في نموذج التعظيم الأولي(*Max*) ، يؤثر على القيد رقم *j* فيظهر بالإشارة)=(في نموذج التدنية الثنائي .

مثال :05 حالة دالة الهدف Max (Z) مع جود متغيرة j أقل أو تساوي:($x_j \leq 0$)

:ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي

$$Max\ Z = 45\, x_1 + 40\, x_2 + 60\, x_3$$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 4x_1 + 6\, x_2 + 2\, x_3 \leq 35 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7\, x_3 \leq 40 \\ 9x_1 + 8x_2 + 3\, x_3 \leq 65 \\ \mathbf{x_1 \leq 0},\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

يلاحظ أن النموذج أعلاه غير مكتوب في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى أقل أو تساوي الصفر، و لذلك وجب تعديل النموذج بحيث نضع $x_1 = -x'_1$:فيصبح الشكل النموذجي كما يلي:

$$Max\ Z = -45\, x'_1 + 40\, x_2 + 60\, x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} -4\, x'_1 + 6\, x_2 + 2\, x_3 \leq 35 \\ -2\, x'_1 + 2x_2 + 7\, x_3 \leq 40 \\ -9\, x'_1 + 8x_2 + 3\, x_3 \leq 65 \\ \mathbf{x'_1},\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

:و بناء عليه يصبح شكل النموذج الثنائي كما يلي

$$\begin{cases} Min\ W = 35\, y_1 + 40\, y_2 + 65\, y_3 \\ -4y_1 - 2y_2 - 9y_3 \geq -45 \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \geq 40 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3\, y_3 \geq 60 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يصبح النموذج المقابل للنموذج الاولي كما يلي:

$$\text{Min } W = 35y_1 + 40\ y_2 + 65\ y_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leq 45 \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \geq 40 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 60 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 06 : حالة دالة الهدف Min (Z) و جميع القيود من الشكل(اكبر أو يساوي(≥

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3\ x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 250 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 450 \\ 4\ x_1 + 3x_2 \leq 850 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يكون النموذج المقابل كما يلي:

$$\textit{Max } Z = 250x_1 + 450\ x_2 + 850\ x_3$$

$$\begin{cases} \textit{Soumise aux contraintes} \\ 1y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 2 \\ 4y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

5- كيفية معرفة أو قراءة الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي و بالعكس

معامل المتغير الراكد ($+x^e_i$) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل = القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Yi) إذا إ كان القيد من النوع أقل ويساوي

(−) معامل المتغير الراكد($-x^e_i$) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل = القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Yi) إذا إ كان القيد كان القيد من نوع أكبر ويساوي

معامل المتغير الراكد (ai) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل (M) ± =

معامل المتغير الراكد (ai) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل (M) ± = القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Yi) إذا كان القيد من نوع مساواة

يتم إضافة−M)) إذا كانت الدالة من نوع Max وكذلك إضافة+ M)) إذا كانت الدالة من نوعMin وتعرف القمة المثلى الثنائية أو ما تسمى بأسعار الظل بأنها مقدار الزيادة أو النقصان في دالة الهدف نتيجة زيادة أو نقصان في الكميات المتاحة من ذلك المورد النادر بمقدار وحدة واحدة .وعند زيادة الكمية المتاحة من مورد معين بمقدار وحدة واحدة سوف يترتب على ذلك زيادة الربح المتحقق بمقدار معين ، ويطلق على هذه الزيادة في الربح والحاصلة نتيجة الحصول على وحدة واحدة إضافية من تلك الموارد بمصطلح (سعر الظل.)

مثال :01إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$\text{Max } Z = 240x_1 + 200\ x_2$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 4x_1 + 4\ x_2 \leq 16 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1,\ x_2,\ \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي.

الحل:

1-إيجاد الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي.

يتم إيجاد جدول الحل الأمثل الأولي ومن بعدها يتم إيجاد الحل الأمثل الثنائي وكالاتي:

أ- إيجاد النموذج القياسي (تحويل المتراجحات إلى معادلات)

$\text{Max } Z = 240x_1 + 200\ x_2 + 0\ X^e{}_3 + 0X^e{}_4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4\ x_2 + X^e{}_3 = 16 \\ 10x_1 + 6x_2 \quad + X^e{}_4 = 30 \\ x_1,\ x_2,\ X^e{}_3,\ X^e{}_4,\ \geq 0 \end{cases}$$

ب-اعداد جدول السمبلكس

جدول الحل الأساسي الأول:

Ci			240	200	0	0	$\frac{b_i}{X_i}$
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	
0	X_3^e	16	4	4	1	0	4
0	X_4^e	30	10	6	0	1	3
$0{=}Z_i$			0	0	0	0	
$Z = Ci - Zi$			240	200	0	0	

X_1 يدخل للأساس

X_4^e يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثاني:

Ci			240	200	0	0	$\frac{b_i}{X_i}$
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	
0	X_3^e	4	0	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{2-}{5}$	$=2.5\frac{20}{8}$
240	X_1	3	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	5
$0=Z_i$			240	144	0	24	
$Z = Ci - Zi$			0	56	0	24−	

X_2 يدخل للأساس

X_3^e يخرج من الأساسي

جدول الحل الأساسي الثالث:

Ci			240	200	0	0
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e
200	X_2	$\frac{20}{8}$	0	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{-2}{8}$
240	X_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{4}$
$860=Z_i$			240	200	35	10
$Z = Ci - Zi$			0	0	35−	10−

وهو جدول الجل الأمثل حيث:

الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأولي أعلاه هو التالي:

أ− **متغيرات القرار**: بما أن النموذج الأولي على شكله النموذجي فإن y_i: هي Z_j لمتغيرة الفجوة S_i، و عليه:

$\frac{3}{2}=X_1$ $\quad X_2 = \frac{20}{8}$ $\quad$ **35** $\quad$ **y₁=** , **y₂= 10,** $\quad 860=Z_i$

ب− **متغيرات الفجوة**: بما أن النموذج من الشكل (Max) فإن$k_i = -(C_j - Z_j)$:

$k_1 = 0, \quad k_2 = 0$

مثال 02 :ليكن النموذج الأولي التالي

$Max\ Z = 120x_1 + 100\ x_2$ النموذج الأ ل

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 2x_1 + 2\ x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1,\ x_2, \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب

1. صغ النموذج المقابل.
2. **إيجاد الحل الأمثل الأولي من جدول الحل الأمثل الثنائي.**

الحل :

$Min\ W = 8\ y_1 + 15\ y_2$ (**النموذج الثنائي**(المقابل

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 2y_1 + 5y_2 \geq 120 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 100 \\ y_1,\ y_2\ .y_3\ .y_4\ .\ a_5\ .\ a_6\ \ .\geq 0 \end{cases}$$

أ- إيجاد النموذج القياسي (تحويل المتراجحات إلى معادلات)

$Min\ W = 16\ y_1 + 30\ y_2 + 0\ \ y^e_3\ + 0\ \ y^e_4 + \ M\ a_5\ \ + Ma_6$

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 - \ y^e_3\ y_3 \quad + \ a_5 \qquad = 120 \\ 2y_1 + 3y_2 - y^e_4 \quad + \quad a_6 \qquad = 100 \\ y_1,\ y_2\ \ .\ y^e_3,\ \ y^e_4 \quad \geq 0 \end{cases}$$

ب-اعداد جدول السمبلكس

جدول الحل الأساسي الأول:

ci			8−	15−	0	0	M−	M−	**bi**
Cj	vj	bi	y_1	y_2	y_3	$_4y$	a_5	a_6	$\boldsymbol{\frac{bi}{Xi}}$
M−	a_5	120	2	5	1−	0	1	0	24
M−	a_6	100	2	3	0	−1	0	1	50
$Z_j=\sum C_j x=-220$ M			4 M−	M8−	M	M	M−	M−	
$Z=C_j-Z_j$			8+4 M−	−15+8 M	M−	M−	0	0	

يدخل للأساس Y_2

يخرج من الأساس a_5

جدول الحل الأساسي الثاني

ci			8−	15−	0	0	M−	M−	**bi**
Cj	vj	bi	y_1	y_2	y_3	$_4y$	a_5	a_6	$\boldsymbol{\frac{bi}{Xi}}$
15−	y_2	24	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	60
M−	a_6	28	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	−1	$\frac{-3}{5}$	1	35
$Z_j=\sum C_j x=-28$ M−360			$-6-\frac{4}{5}M$	15−		M		M−	
$Z=C_j-Z_j$			$\frac{4}{5}M-2$	0	$M-3\frac{3}{5}$	−M	$M+\frac{-8}{5}$ 3	0	

يدخل للأساس Y_1

يخرج من الأساس a_6

جدول الحل الأساسي الثالث

ci			8−	15−	0	0	M−	M−
Cj	vj	bi	y_1	y_2	y_3	$_4y$	a_5	a_6
15−	y_2	10	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
8−	y_1	35	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{5}{4}$
$Z_j=\sum C_j x=-430$			8−	15−	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$Z=C_j-Z_j$			0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}-$ M	$\frac{5}{2}-$ M

وهو جدول الحل الأمثل وعليه فان الحل الأمثل الثنائي يكون كما يلي:

حيث $\frac{3}{2}=X_1$ $X_2=\frac{5}{2}$ $y_1=35$, $y_2=10$, $430=Z_i$

Max (Z) − =) Min (W