كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية **قسم:** العلوم الاقتصادية

السنة الأولى ماستر: اقتصاد وتسيير المؤسسات

السلسلة الخامسة في مقياس مراقبة التسيير

تمرين 01:

لتكن المبيعات الفصلية لإحدى المؤسسات لمدة 03 سنوات كما يلي:

السنة / الفصول	1	2	3	4	المجموع
2000	32000	32500	25000	38000	127500
2001	40000	42000	32000	48000	162000
2002	44000	44000	36000	56000	180000

المطلوب: قم بتقدير مبيعات الفصل الأول من سنة 2003 وذلك باتباع طرقة المتوسطات المتحركة البسيطة.

تمرين 02:

الجدول التالي يعطي كميات القمح المنتجة في هكتار واحد (Y) والناتجة عن استخدام كميات مختلفة من السماد (X)

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Y كمية القمح	40	44	46	48	52	58	60	68	74	80	570
X كمية السماد	60	10	12	14	16	18	22	24	26	32	180

المطلوب:

1. استخرج معادلة الانحدار Yعلى X
2. أحسب R^2، R، S_{R^2}، S_b^2، S_a^2، S_b، S_a، t_0، t_1
3. اختبر معنوية المعالم b وa عند مستوى ثقة 5% علما أن t الجدولية هي 2.306
4. كون فترات ثقة بـ 95% لكل من $\hat{a}$، $\hat{b}$

حل التمرين 01:

نجري عملية التمهيد حيث أن: (n=4)

$$\tilde{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_{t-1}$$

$$\tilde{Y}_1 = \frac{1}{4}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \frac{1}{4}(32000 + 32500 + 25000 + 38000) = 31875$$
$$\tilde{Y}_2 = \frac{1}{4}(Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5) = \frac{1}{4}(32500 + 25000 + 38000 + 40000) = 33875$$

وبنفس الطريقة نكمل حساب قيمة بقية المتوسطات فنتحصل على السلسلة الممهدة الجديدة كما يلي:

Σ	9	8	7	6	5	4	3	2	1	الفترة الزمنية X
352000	45000	43000	42000	41500	40500	38000	36250	33875	31875	$\tilde{Y}$ الممهدة
285	81	64	49	36	25	16	9	4	1	X^2
1854875	405000	344000	294000	249000	202500	152000	108750	67750	31875	$X\tilde{Y}$

نطبق طريقة المربعات الصغرى البسيطة Ordinary Least Squares (OLS) على السلسلة الجديدة

$$\tilde{Y} = a + bx$$

نستخرج قيمة a وb من خلال المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} \sum \tilde{Y} = na + b\sum X \\ \sum X\tilde{Y} = a\sum X + b\sum X^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 352000 = 9a + 45b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 1854875 = 45a + 285b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) في (−5) فنجد:

$$\begin{cases} -1760000 = -45a - 225 \\ 1854875 = 45a + 285b \end{cases}$$

نجمع المعادلتين معا فنتحصل على:

$$-94875 = 0a - 60b$$
$$b = \frac{94875}{60} = 1581.25$$

نعوض قيمة b في احدي المعادلتين فنجد a = 31204.861

ومنه تكون المعادلة التقديرية للسلسلة الجديدة الممهدة:

متوسط المبيعات الفصلية التقديرية ← $\tilde{Y} = 31204.861 + 1581.25X$ ← الفترة الزمنية المرغوب تقديرها

إذا أردنا حساب أو إيجاد توقعات مبيعات الفصل الأول لسنة 2003 نعوض قيمة X في المعادلة السابقة حيث (X=10):

$$\tilde{Y} = 47017.361 = \hat{Y}_{t+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_{t-1}$$

وهي نفسها $47017.361 = \frac{Y_{13}+56000+36000+44000+4000}{4}$

ومنه $Y_{13} = 52071.44$ وهي مبيعات الفصل الأول المقدرة لسنة 2003

حل التمرين 02:

X_i^2	e_i^2	e_i	$\hat{Y}$	x_i^2	x_i yi	y_i	x_i	كمية السماد X	كمية القمح Y	السنة n
36	8.5264	2.92	37.08	144	204	−17	−12	06	40	1
100	0.0784	0.28	43.72	64	107	−13	−08	10	44	2
144	1.0816	−1.04	47.04	36	66	−11	−06	12	46	3
196	5.5696	−2.36	50.36	16	36	−09	−04	14	48	4
256	2.8224	−1.68	53.68	04	10	−05	−02	16	52	5
324	1.0000	1.00	57	00	00	01	00	18	58	6
484	13.2496	−3.64	63.64	16	12	03	04	22	60	7
576	1.0816	1.04	66.96	36	66	11	06	24	68	8
676	13.8384	3.72	70.28	64	136	17	08	26	74	9
1024	0.0576	−0.24	80.24	196	322	23	14	32	80	10
3816	47.3056	/	/	576	956	00	00	180	570	Σ

استخراج معادلة الانحدار Y على X:

حساب $\bar{X}$ و$\bar{Y}$:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{180}{10} = 18$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{570}{10} = 57$$

حساب a و b ومعادلة الانحدار:

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{956}{576} = 1.65$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} \rightarrow b = 57 - 1.65(18) = 27.3$$

إذا معادلة الانحدار Yعلى X تكون من الشكل: $\hat{Y} = 1.65X + 27.3$

حساب معاملات الجودة والتوفيق:

حساب معامل التحديد R^2:

$$R^2 = a.\grave{a} = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$$

حساب $\grave{a}$

$$\grave{a} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2} = \frac{956}{1634} = 0.58$$

وعليه فان قيمة معامل التحديد R^2 هي:

$$R^2\% = a.\grave{a} = (1.65)(0.58) = 0.9570 = 95.70\%$$

ومنه يمكن القول إن قيم X تفسر تباين Yبنسبة 95.70%

حساب معامل الارتباط R:

$$\boldsymbol{R\% = \sqrt{R.^2} = \sqrt{a.\grave{a}} = \sqrt{0.9570} = 0.9782 = 97.82\%}$$

وعليه يمكن القول بأن هناك الارتباط قوي جدا واتجاه موجب بين المتغيران X وY (علاقة طردية بين X وY)، وذلك حسب إشارة المعلمة أو المعامل a

حساب الخطأ المعياري في تحديد معامل التحديد R^2 :

$$S_{R^2} = \sqrt{\frac{(1-R^2)\sum y_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{(1-0.9570)(1634)}{10-2}} = 2.96 = 29.6\%$$

وعليه يمكن القول بأن نسبة الخطأ المعياري في حساب معامل التحديد ضعيفة نسبيا، وهو أقرب إلى القبول من الرفض

حساب تباين وانحراف المعلمة b:

$$S_{b^2} = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \times \frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2} = \frac{47.3056}{10-2} \times \frac{3816}{10(576)} = 3.92$$

$$S_b = \sqrt{3.92} = 1.97$$

وعليه يمكن القول بأن الانحراف المعياري في تقدير قيمة المعلمة b هو 1.97

حساب تباين وانحراف المعلمة a:

$$S_{a^2} = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \times \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{473056}{10-2} \times \frac{3816}{576} = 0.01$$

$$S_a = \sqrt{0.01} = 0.1$$

وعليه يمكن القول بأن الانحراف المعياري في تقدير قيمة المعلمة a هو 0.1

حساب المعنويتين الاحصائيتين t_0، t_1:

نعلم أنه عند حساي t_0، t_1 أن كلا من $\hat{b} = 0$ و $\hat{a} = 0$، وعليه فإن:

$$t_0 = \frac{b - \hat{b}}{S_b} = \frac{b}{S_b} = \frac{27.3}{1.97} = 13.78$$

$$t_1 = \frac{a - \hat{a}}{S_a} = \frac{a}{S_a} = \frac{1.65}{0.1} = 16.50$$

اختبار معنوية المعالم b و a عند مستوى ثقة 5% علما أن t الجدولية هي 2.306 :

عندما نتفحص توزيع (student) عند درجة حرية 8 = (10−2) = (a−k) وعند مستوى الثقة 5% (0.05)، نجد أن كلا من t_0، t_1 > 2.306 (t الدولية) وبالتالي فالمعلمتان b وa معنويتان إحصائيا عند مستوى معنوية 5%، وعليه فإننا نرفض الفرض العدمي H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

تكوين فترات ثقة بـ 95% لكل من $\hat{a}$،$\hat{b}$:

نقصد بفترة الثقة المجال الذي تنحصر فيه المعالم $\hat{a}$،$\hat{b}$ بدرجة ثقة معينة/ ويحسب المجال بالنسبة لكل معلمة بالعلاقة التالية:

$$\hat{b} = b \pm t_t(S_{b)}$$

$$\hat{a} = a \pm t_1(S_{a)}$$

حيث أن t_t هي t الجدولية المستخرجة من توزيع ستيودنت (Student)

إذا سنجد بأن قيمة $\hat{a}$ عند مجال ثقة 95% (مستوى معنوية 5%) هي:

$$\hat{a} = 1.65 \pm 2.306(0.1)$$

$$1.4194 < \hat{a} < 1.8806$$

هنا نقول أن بنسبة 95% $\hat{a}$ محصورة بين 1.4194 و1.8806

بالنسبة لـ $\hat{b}$ سنجد بأن قيمة $\hat{b}$عند مجال ثقة 95% (مستوى معنوية 5%) هي:

$$\hat{b} = 27.3 \pm 2.306(1.97)$$

$$22.757 < \hat{b} < 31.842$$

ومنه نقول أن بنسبة 95% $\hat{b}$ محصورة بين22.757 و31.842