جامعة باجي مختار عنابة
كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

السنة الأولى LMD
تخصص ميزانية الدولة
2025/05/22
المدة الزمنية: ساعة ونصف

اختبار السداسي الثاني رياضيات 2

التمرين الأول (08ن):

- حل المعادلات التفاضلية الآتية :

1) $2xyy' - (y^2 + 1) = 0$
2) $(1 + e^x)yy' = e^x \, , y(0) = 1$
3) $x^2y' - xy^2 + y^2 = 0$
4) $2\sqrt{x}y' = (1 + y)$
5) $y'' - y' + y = 0$

التمرين الثاني (06ن):

- لتكن الجملة الخطية (s) المعرفة ب :

$$(s)\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 18 \\ x + y - 3z = -2 \\ -x + 3y + 2z = -7 \end{cases}$$

حل الجملة (s) بطريقتي كرامر و غوس (Gauss).

التمرين الثالث (06ن):

I. لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. عين القيم الذاتية ل A.
2. أوجد التطبيق الخطي f المرفق للمصفوفة A
3. احسب $A^2 - 4A + I_3$

بالتوفيق.

جامعة باجي مختار عنابة

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

السنة الأولى L.M.D

تخصص جزائية الدولة

التصحيح النموذجي للامتحان الرياضيات 2.

التمرين 1: حل المعادلات التفاضلية:

1) $2xyy' - (y^2+1) = 0$

$2xyy' = (y^2+1) \longrightarrow \dfrac{2yy'}{y^2+1} = \dfrac{1}{x}$

$\int \dfrac{2y}{y^2+1}dy = \int \dfrac{1}{x}dx \longrightarrow \ln|y^2+1| = \ln x + C$ (0,25)

(0,5)

$\dfrac{2y}{y^2+1} = \dfrac{y'}{y}$

$y^2+1 = \pm e^{\ln x + C} = \pm e^{\ln x} \cdot e^{C}$

C_1

(0,5)

$y^2+1 = \pm C_1 x \longrightarrow y^2 = \pm C_1 x - 1$

$\boxed{y = \pm\sqrt{-1 \pm C_1 x}}$ (0,25)

##

2) $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0)=1$

$yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$ (0,25) $\longrightarrow$ $y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + C \longrightarrow y^2 = 2\ln|1+e^x| + C$ (0,25) (0,25)

$y = \pm\sqrt{2\ln|1+e^x| + C}$ (0,25), $y(0) = \pm\sqrt{2\ln|2| + C} = 1$

$1 = \pm\sqrt{\ln 2^2 + C} \Rightarrow C = 1 - \ln 4$ (0,5)

$y = \sqrt{2\ln|1+e^x| + 1 - \ln 4}$ (0,25 pour le signe)

#

3) $x^2y' - xy^2 + y^2 = 0$ (1,5)

$x^2y' = y^2(x-1) \longrightarrow \frac{1}{y^2}y' = \frac{x-1}{x^2}$

$\frac{1}{y^2}dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

$\frac{-1}{y} = \ln x + \frac{1}{x} + C \Rightarrow y = \frac{-1}{\ln x + \frac{1}{x} + C}$

#

4) $2\sqrt{x}\,y' = (1+y)$

$$\frac{1}{1+y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow \int \frac{1}{1+y}\,dy = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\ln|1+y| = \sqrt{x} + C \Rightarrow |1+y| = e^{\sqrt{x}+C} = C_1 e^{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y = \pm C_1 e^{\sqrt{x}} - 1}$$

111

##

7) $y'' - y' + y = 0$

$r^2 - r + 1 = 0$, $\Delta = -3 = 3i^2$ $(i^2 = -1)$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}\,i$

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta} i$$

111

$$\boxed{y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

##

التمرين 2 :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 18 \\ x + y - 3z = -2 \\ -x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

بطريقة كرامر : الشكل المصفوفي :

$$AX = b$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{21 \neq 0} \quad (0,5)$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 18 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{21} = \frac{18\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{21}$$

$$= \frac{126}{21} = \boxed{3} \quad (0,5)$$

$$\boxed{3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 18 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -7 & 2 \end{vmatrix}}{\Gamma 1} = \frac{-102}{\Gamma 1} = \boxed{-2}$$

0,75

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 18 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix}}{\Gamma 1} = \frac{\Gamma 1}{\Gamma 1} = \boxed{1}$$

0,75

$$\boxed{X \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

0,25

حل الجملة (S):

طريقة Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & | & 18 \\ 1 & 1 & -3 & | & -2 \\ -1 & 3 & 2 & | & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$L_2 \cdot 3 - L_1$

$L_3 \cdot 3 + L_1$

0,75

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & | & 18 \\ 0 & 5 & -14 & | & -24 \\ 0 & 7 & 11 & | & -3 \end{pmatrix}$$

0,5

$L_3 \cdot 5 - L_2 \cdot 7 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & \\ 0 & 5 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

ومنه الجملة المكافئة لـ (S) هي:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 18 \\ 2y - 14z = -24 \\ 12z = 12 \end{cases}$$

$\longrightarrow x = 3$

$\longrightarrow y = -2$

$\longrightarrow z = 1$

(1.5)

الحل هو: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0.25)

التمرين 3: 1) القيم الذاتية لـ A:

$\det(A - \lambda I_3) = 0$?

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

(1)

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) + 2(2-\lambda)$$

(3)

$$= (2-\lambda)\left[\underbrace{(1-\lambda)(4-\lambda)+2}_{"(\lambda-3)(\lambda-2)}\right] = 0$$

$$\begin{cases} (2-\lambda) = 0 \longrightarrow \\ (\lambda-3) = 0 \longrightarrow \\ \lambda-2 = 0 \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

0,25

القيم الذاتية لـ A:

2) المتطبيقة الخطية المرفقة لـ A:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 0,25

$f(x,y,z) = ?$

الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$:

$\mathcal{U} = \{u_1(1,0,0), u_2(0,1,0), u_3(0,0,1)\}$ 0,25

العمود الأول: $f(u_1) = (1,0,-2)$

العمود الثاني: $f(u_2) = (0,2,0)$ 0,5

العمود الثالث: $f(u_3) = (1,3,4)$.

نأخذ أي شعاع كيفي من $\mathbb{R}^3$ الذي يكتب في الأساس $\mathcal{U}$ لـ $\mathbb{R}^3$:

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ 0,25

$= xu_1 + yu_2 + zu_3$

$f(x,y,z) = f(xu_1 + yu_2 + zu_3)$ 0,25 : ومنه

$= xf(u_1) + yf(u_2) + zf(u_3)$: ومنه 0,25 0,25

$= x(1,0,-4) + y(0,1,0) + z(1,3,4)$

$f(x,y,z) = (x+z, 3y+3z, -2x+4z)$: ومنه 0,5

ومنه المطلوب

3) حساب $A^2 - 4A + I_3$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -6 & 9 & 27 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$A^2 - 4A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -6 & 9 & 27 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 12 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (1)

#

انتهى.