

تمهيد

نظرية سلوك المستهلك في إطار المنفعة الكمية تسعى إلى تفسير كيف يقرر المستهلك تخصيص دخله R بين السلع والخدمات المختلفة من أجل تحقيق أقصى منفعة كلية. UT . تعتمد هذه النظرية على افتراض أن المنفعة قابلة للقياس عددياً، وأن المستهلك يسعى دائماً إلى تعظيم رضاه ضمن حدود دخله وأسعار السلع. سنتناول في هذه المحاضرة قيد الميزانية، التوازن الرياضي في حالتَي التعظيم والتدنية، اشتقاق دوال الطلب، والتبادل بين السلع.

1. قيد الميزانية:

يمثل قيد الميزانية المعادلة التي توضح جميع التوليفات الممكنة لسلعتين X و Y التي يمكن للمستهلك شراؤها بدخله R وبأسعار PX و PY

$$R = P_X X + P_Y Y$$

مثال: إذا كان $R=100$ و $PX=10$ و $PY=20$ ، فإن قيد الميزانية هو:

$$100 = 10X + 20Y$$

يمثل هذا خط الميزانية الذي يوضح التبادلات الممكنة بين X و Y

يتم حساب الدخل الكلي للمستهلك بالمعادلة التالية:

$$R = X P_X + Y P_Y$$

أي أن الدخل يساوي كمية السلعة X مضروبة في سعرها، بالإضافة إلى كمية السلعة Y مضروبة في سعرها.

مثال توضيحي:

إذا كان الدخل $R=100$ ، سعر السلعة $X=10$ ، وسعر السلعة $Y=20$ ، فإن:

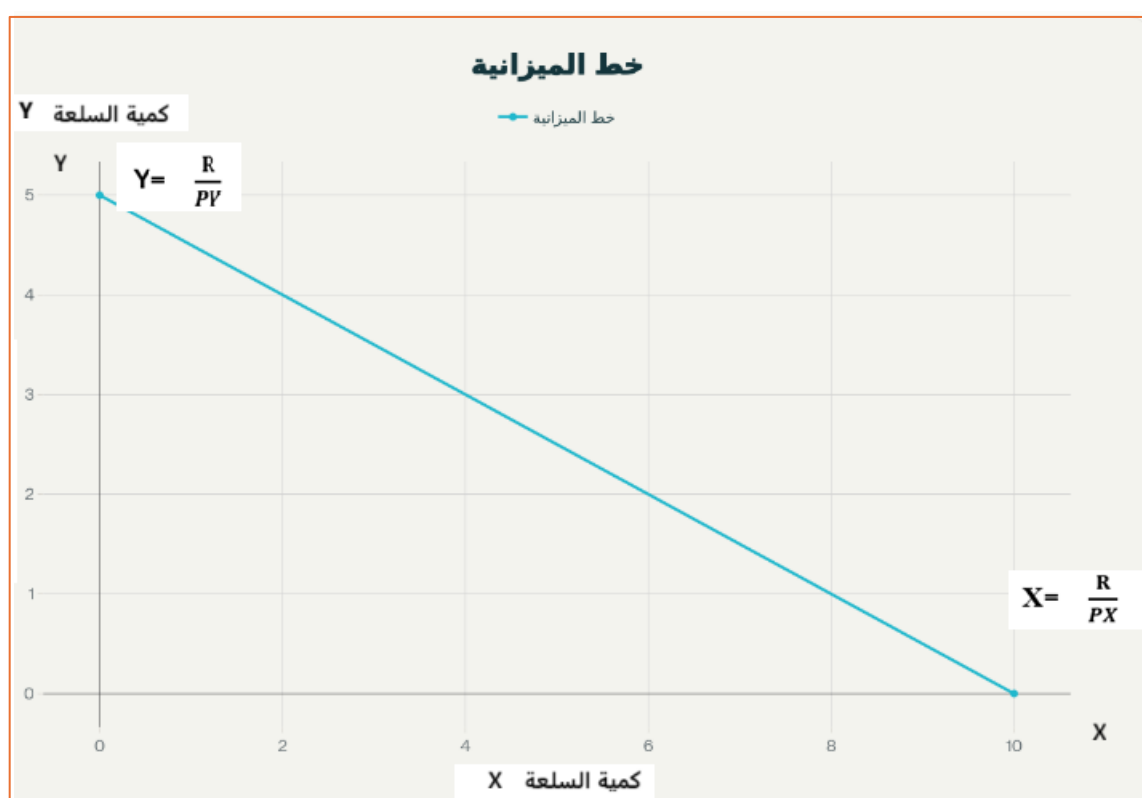
$$100 = 10X + 20Y$$

يمثل هذا الخط حدود الإنفاق الكلي للمستهلك، ولا يمكن تجاوزها. يمكن رسم خط الميزانية بيانيًا حيث تظهر كل نقطة على الخط كمزيج من السلع التي تستهلك كل الدخل.

عند قسمة الدخل على سعر السلعة المشار إليه بالرمز P_X ، نحصل على أقصى كمية يمكن للمستهلك شراؤها من السلعة X إذا أنفق كامل دخله عليها فقط:

$$X = \frac{R}{P_X} \quad \text{أقصى كمية من } X$$

$$Y = \frac{R}{P_Y} \quad \text{أقصى كمية من } Y$$



حيث أن:

$$X = 10 \quad \text{أقصى كمية من السلعة المستهلكة}$$

$$Y = 5 \quad \text{أقصى كمية مستهلكة من السلعة المستهلكة}$$

2.. توازن المستهلك باستخدام فكرة المنفعة :

يحدث عندما يوزع المستهلك دخله بحيث تتساوى المنفعة الحدية لكل وحدة نقد بين السلع:

أ. توازن المستهلك في حالة استهلاك سلعة واحدة:

يكون المستهلك في حالة توازن عند استهلاك سلعة واحدة عندما تتساوى المنفعة الحدية المكتسبة من الوحدة الأخيرة مع المنفعة الحدية التي ضحى بها، أي عندما يصبح الإشباع الناتج عن اقتناء الوحدة الأخيرة من السلعة مساوياً للثمن الذي دفعه مقابل هذه الوحدة. بعبارة أخرى، المستهلك يقارن بين:

✓ المنفعة الحدية التي يحصل عليها من السلعة.

✓ المنفعة الحدية التي ضحى بها عند دفع المال للشراء، أي قيمة النقود التي أنفقها.

الصياغة الرياضية لشرط التوازن:

في هذه الحالة، يتم التعبير عن شرط توازن المستهلك للصيغة التالية:

$$U_{mx} = \lambda \cdot P_x$$

حيث:

U_{mx} : المنفعة الحدية المكتسبة من السلعة (أي مقدار الإشباع الذي يحصل عليه من استهلاك وحدة إضافية منها)

λ : المنفعة الحدية للنقود أو ما يعرف بقيمة وحدة النقد أو مقدار الإشباع الذي يحصل عليه المستهلك عند استهلاك المال في أي سلعة أخرى.

P_x : سعر السلعة الواحدة أي مقدار المال المدفوع للحصول على وحدة إضافية.

هذه المعادلة تعني أن المستهلك يحقق التوازن حينما تكون المنفعة الحدية للوحدة الأخيرة من سلعة ما مساوية للمنفعة التي ضحى بها متمثلة في المال المدفوع، أي لا يوجد لديه دافع لزيادة أو تقليل الاستهلاك من السلعة لأن المنفعة المحصلة تساوي المنفعة المكلفة.

مثال توضيحي :

افترض أن مستهلك لديه دخل معين، ويرغب في إنفاقه على سلعة واحدة فقط. عندما يشتري وحدة إضافية من هذه السلعة، يحصل على منفعة إضافية مقابل دفع سعرها. يواصل المستهلك شراء وحدات إضافية

حتى يصبح مقدار المنفعة الحدية التي يحصل عليها من آخر وحدة قام بشرائها مساويا لقيمة ما دفعه مقابلها (أي سعر السلعة مضروب في المنفعة الحدية للنقود).

إذا كانت المنفعة الحدية أكبر من المنفعة التي ضحى بها (قيمة المال)، سيستمر المستهلك في الشراء، أما إذا صارت أقل فسيتوقف عن الشراء. بذلك يصل لوضع التوازن حيث لا يفكر في تغيير الكمية المستهلكة. في الحياة اليومية، يواجه المستهلك هذا التوازن في كل قرار شراء—فهو يقيم باستمرار ما إذا كانت المنفعة التي سيحصل عليها من شراء سلعة معينة تساوي أو تتجاوز ما ضحى به من أجلها وهو المال المدفوع لها.

النقطة الجوهرية هي أن توازن المستهلك يجعل عملية إنفاق الدخل أكثر كفاءة؛ بحيث يحقق المستهلك أقصى قدر من الإشباع دون إهدار الدخل على وحدات لا تعود عليه بمنفعة مساوية لما دفع مقابلها

تمرين :

يفترض أن المستهلك يستهلك السلعة X حيث سعر السلعة الواحدة Px هو 4 وحدات نقدية، وأن منفعة الوحدة النقدية الواحدة (أي المنفعة الحدية للنقود) $\lambda = 3$ يُطلب تحديد وضع توازن المستهلك في ظل هذه القيم.

الوحدات المستهلكة من السلعة x	0	1	2	3	4	5	6	7
المنفعة الكلية (UTx)	0	12	22	30	36	40	43	45
المنفعة الحدية (Umx)	-	12	10	8	6	4	3	2

المطلوب :

أوجد وضع توازن المستهلك، موضحا خطواتك حسابياً.

الحل:

الوحدات المستهلكة من السلعة x	0	1	2	3	4	5	6	7
المنفعة الكلية (UTx)	0	12	22	30	36	40	43	45
المنفعة الحدية (Umx)	-	12	10	8	6	4	3	2
المنفعة الكلية المضحى بها $\lambda \cdot PX$	-	12	12	12	12	12	12	12

1. نحسب $\lambda \cdot PX = 3 \times 4 = 12$

2. نقارن المنفعة الحدية (Umx) مع $\lambda \cdot PX$ عند كل مستوى استهلاك.

3. التوازن يحدث عندما $U_{mx} = \lambda \cdot P_y$ ، أو عندما تبدأ المنفعة الحدية بالانخفاض دون $\lambda \cdot P_x$

بما أن $U_{mx}=12$ عند استخدام الوحدة الأولى فقط، إذن التوازن يتحقق عند استهلاك وحدة واحدة من السلعة x فقط، لأن عند استخدام وحدات إضافية، المنفعة الحدية تصبح أقل من تكلفة التضحية من المال.

$$U_{T_x} = \sum_{x=1}^n U_{mx}$$

$$U_{T_x}=45$$

ب. توازن المستهلك في حالة استهلاك سلعتين:

إذا كان المستهلك سيخصص دخله لشراء سلعتين، فعليه أن يحقق شرط التوازن التالي:

- **الشرط الضروري:** تساوي المنفعة الحدية للنقود على كل سلعة من السلعتين

يجب أن تتساوى المنفعة الحدية لكل وحدة نقود منفقة على كل سلعة من السلع، وذلك على النحو الرياضي:

$$\frac{U_{mx}}{P_x} = \frac{U_{my}}{P_y} = \lambda$$

- **الشرط الكافي:** تساوي دخل المستهلك مع مجموع المبالغ المنفقة على السلع المستهلكة

$$R = xP_x + yP_y$$

ج. في حالة استهلاك أكثر من سلعتين :

إذا افترضنا في هذه الحالة أن المستهلك سيوزع دخله على شراء أكثر من سلعة، فإن هذا المستهلك يصل إلى وضع التوازن إذا توفر الشرطين الآتيين:

- **الشرط الضروري:** تساوي المنفعة الحدية للنقود على كل سلعة من السلع

فإذا كان المستهلك سيخصص دخله لشراء عدة سلع، فعليه أن يحقق شرط التوازن التالي: يجب أن تتساوى المنفعة الحدية لكل وحدة نقود منفقة على كل سلعة من السلع. وذلك على النحو الرياضي التالي:

$$\frac{U_{mx}}{P_x} = \frac{U_{my}}{P_y} \dots \dots \dots \frac{U_{mn}}{P_n} = \lambda$$

P_x, P_y, P_n أسعار السلع المختلفة.

U_{mx}, U_{my}, U_{mn} المنافع الحدية للسلع المختلفة (أي مقدار الإشباع الإضافي المستمد من استهلاك وحدة إضافية من السلعة)

λ : المنفعة الحدية للنقود؛ أي مقدار الإشباع أو المنفعة المكتسبة من وحدة نقدية واحدة.

-الشرط الكافي : تساوي دخل المستهلك مع مجموع المبالغ المنفقة على السلع المستهلكة (أي الالتزام بقيد الميزانية. هذه الحالة تعني أقصى منفعة ممكنة).

$$R = x P_x + y P_y + \dots \dots + n P_n$$

حيث:

- $x, y, \dots, n$ تمثل كميات السلع المستهلكة المختلفة.
 - P_x, P_y, P_n تمثل أسعار السلع المستهلكة. $x, y, \dots, n$.
 - R يمثل دخل المستهلك الكلي.
 - xP_x : مقدار الإنفاق على السلعة (x).
 - yP_y : مقدار الإنفاق على السلعة (y).
 - nP_n : مقدار الإنفاق على السلعة (n).
- بناء على هذه الرموز، يصبح نموذج توازن المستهلك عند استهلاك سلعتين (x) و (y) كما يلي :
1. يجب أن يتحقق شرط تساوي المنفعة الحدية للنقود بين السلع، أي :

$$\begin{cases} \frac{U_{mx}}{P_x} = \frac{U_{my}}{P_y} = \lambda \dots \dots (1) \\ R = xP_x + yP_y \dots \dots (2) \end{cases}$$

نموذج توازن المستهلك في حالة سلعتين

بمعنى :

يجب أن يتحقق شرط تساوي المنفعة الحدية للنقود بين السلع، أي:

$$\frac{U_{mx}}{P_x} = \frac{U_{my}}{P_y} = \lambda$$

1. حيث U_{mx} و U_{my} هما المنفعتان الحديتان لكل من السلعتين (X) و (Y)، و P_x و P_y هما أسعارهما على التوالي، و λ هو المنفعة الحدية للنقود.

2. ينفق المستهلك كل دخله على السلع، أي:

$$R = xP_x + yP_y$$

بحيث يتم توزيع الدخل بشكل كامل بين السلعتين.

تمرين:

افترض أن هناك مستهلكا يريد توزيع دخله بين سلعتين (X) و (Y)، يُعطى الجدول التالي للمنفعة الحدية وعدد الوحدات المستهلكة من كل سلعة:

وحدات مستهلكة من السلعة X . Y	0	1	2	3	4	5
المنفعة الحدية من السلعة X (U _{mx})	-	11	8	6	4	3
المنفعة الحدية من السلعة Y (U _{my})	-	13	9	7	5	2

إذا كان: $(P_X) = 2$ ، و $(P_Y) = 3$ ، دخل المستهلك $R = 12$ وحدة نقدية.

المطلوب:

حدد الكميات المثلى التي يجب أن يستهلكها المستهلك من السلعتين ليكون في حالة توازن. وضح الخطوات

الحل:

1. شرط توازن المستهلك: يجب أن يتحقق:

$$\frac{U_{mx}}{P_x} = \frac{U_{my}}{P_y}$$

2. نحسب العائد من كل وحدة نقدية:

- المنفعة الحدية لوحدة (X) مقسومة على سعرها.
- المنفعة الحدية لوحدة (Y) مقسومة على سعرها.

$\frac{U_{my}}{P_y}$	$\frac{U_{mx}}{P_x}$	المنفعة الحدية من السلعة Y (U_{my})	المنفعة الحدية من السلعة X (U_{mx})	وحدات مستهلكة من السلعة X . Y
-	-	-	-	0
4.33	5.5	13	11	1
3	4	9	8	2
2.33	3	7	6	3
1.66	2	5	4	4
0.66	1.5	2	3	5

عندما يستهلك 3 وحدات من (X) و 2 وحدات من (Y)

$$\frac{U_{mx}}{P_x} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{يقابلها 3 وحدات من السلعة X}$$

$$\frac{U_{my}}{P_y} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{يقابلها 2 وحدات من السلعة Y}$$

نحقق قيود الدخل : $R = XP_X + YP_Y$

$$12 = 6 + 6 = (3 \times 2) + (2 \times 3) \quad \text{الإنفاق الكلي = وحدة نقدية (أي يستهلك كل الدخل).}$$

النتيجة المثلى:

• يستهلك المستهلك 3 وحدات من السلعة (A).

• يستهلك المستهلك 2 وحدات من السلعة (B).

وبذلك يكون المستهلك في حالة توازن ويستغل دخله على النحو الأمثل بين السلعتين.

تمرين مقترح:

التمرين المقترح

افتراض أن هناك مستهلكاً يوزع دخله بين سلعتين: سلعة (X) وسلعة (Y) الجدول التالي يوضح الوحدات المستهلكة والمنفعة الحدية لكل سلعة:

المنفعة الحدية من السلعة Y (U _{my})	المنفعة الحدية من السلعة X (U _{mx})	وحدات مستهلكة من السلعة X . Y
-	-	0
10	12	1
8	9	2
6	7	3
4	5	4
3	2	5

إذا علمت:

سعر سلعة 3 = (x) وحدات نقدية، وسعر سلعة 2 = (y) وحدات نقدية. دخل المستهلك = 16 وحدة نقدية.

المطلوب:

حدد الكميات المثلى التي يجب أن يستهلكها المستهلك من السلعتين ليكون في حالة توازن

3.توازن المستهلك في حالة وجود قيود:

أ.حالة التعظيم:

يوجد طريقتان رئيسيتان لدراسة وضع التوازن للمستهلك عندما يكون هناك قيود (غالبًا قيد الدخل):

- طريقة التعويض المباشر (الطريقة المباشرة):

تعتمد هذه الطريقة على تحويل مسألة تعظيم المنفعة إلى مسألة رياضية بمتغيرين تحت قيد مالي.

الخطوات الأساسية لهذه الطريقة:

خطوات تطبيق الطريقة المباشرة:

الخطوة الأولى: استخراج أحد المتغيرين بدلالة الآخر باستخدام معادلة القيد:

معادلة القيد (Constraint Equation) هي:

$$R = x \cdot P_x + y \cdot P_y$$

حيث:

- R هو دخل المستهلك الكلي.
- X و y هما كميات السلع المستهلكة.
- P_x و P_y هما أسعار السلع.
- يتم استخلاص أحد المتغيرين مثلاً: (y) بدلالة الآخر (x) أو العكس، باستخدام هذه المعادلة.

الخطوة الثانية: التعويض بقيمة المتغير المستخرج في دالة المنفعة:

• تصبح دالة المنفعة الكلية:

$$UT=f(x,y)$$

الخطوة الثالثة: تطبيق شرط تعظيم المنفعة

الشرط الأول (اللازم):

نستخدم المشتقة الأولى لدالة المنفعة بالنسبة للمتغير المختار x أو y

لتحقيق أقصى منفعة هو أن تكون المشتقة الأولى صفراً:

$$\frac{dUT}{dx} = 0$$

وهذا يعني أن نقطة التوازن هي النقطة التي تتوقف عندها الزيادة في المنفعة الكلية مع كل زيادة في الكمية المستهلكة من السلعة.

الشرط الثاني (الكافي) : المشتقة الثانية لدالة المنفعة الكلية تكون سالبة

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

المشتقة الثانية السالبة :عندما تكون $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ فهذا يعني أن دالة المنفعة تتقعر للأسفل (منحنية بشكل هابط).

رياضياً: هذا يعني أن كل زيادة في كمية السلعة تؤدي إلى ارتفاع المنفعة بمعدل متناقص. هذا يتوافق مع قانون المنفعة الحدية المتناقصة في الاقتصاد (كلما زاد استهلاك السلعة، يقل معدل الزيادة في الإشباع الناتج عن كل وحدة إضافية)

مثال :

لتكن دالة المنفعة الكلية للمستهلك على الشكل التالي:

$$U=4xy$$

حيث x و y تمثلان الكميات المستهلكة من السلعتين (X) و (Y) ، على الترتيب.

إذا كان دخل المستهلك $R=48$ وحدة نقدية، وسعر السلعة X هو $PX=4$ وسعر السلعة Y هو $PY=8$

المطلوب: استخدم طريقة التعويض لإيجاد الكميات المثلى من x و y التي تحقق أقصى منفعة ممكنة.

الحل:

1. كتابة قيد الميزانية:

$$4x+8y=48$$

2. استخراج أحد المتغيرين بدلالة الآخر:

يمكن التعبير عن y بدلالة x

$$8y=48-4x$$

$$y = \frac{48-4x}{8}$$

$$=6-0.5x$$

3. التعويض في دالة المنفعة:

$$U=4x(6-0.5x)$$

$$U=24x-2x^2$$

تطبيق الشرط اللازم (المشتقة الأولى = صفر):

نحسب المشتقة الأولى لدالة المنفعة الجديدة بالنسبة لـ x

$$\frac{dUT}{dx} = 24 - 4x = 0$$

نعادلها بالصفر $24 - 4x = 0$

$$24 = 4x$$

$$6 = x$$

نعوض بقيمة x في معادلة y

$$y = 6 - 0.5(6) = 6 - 3 = 3$$

تطبيق الشرط الكافي (المشتقة الثانية سالبة):

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

$$= -4 < 0$$

المشتقة الثانية سالبة دائماً، إذن القيم المحسوبة تعطي نقطة عظمى (أي تعظيم حقيقي).

إذن:

الكميات المثلى التي تحقق أقصى إشباع ممكن هي:

$$x^* = 6 \quad . \quad x^* = 6$$

$$y^* = 3 \quad . \quad y^* = 3$$

ويتحقق التوازن لأن:

• الشرط اللازم (المشتقة الأولى = 0) محقق

• الشرط الكافي (المشتقة الثانية سالبة) محقق.

الطريقة الثانية: طريقة مضروب لاغرانج:

تعد طريقة مضاعف لاغرانج (Lagrange Multiplier Method) من الأساليب الرياضية الأساسية المستخدمة في الاقتصاد الجزئي، خصوصاً عند تحليل سلوك المستهلك. تهدف هذه الطريقة إلى حل مسائل التخصيص الأمثل للموارد عندما يكون هناك قيود مفروضة على عملية الاختيار، مثل قيد الدخل الذي يواجهه المستهلك خلال عملية الشراء.

ستند فكرة طريقة مضاعف لاغرانج إلى دراسة سلوك المستهلك الذي يسعى إلى تحقيق أقصى منفعة ممكنة من دخله المحدود، من خلال توزيع هذا الدخل على سلع وخدمات متعددة. في الواقع العملي، لا يمتلك المستهلك حرية مطلقة في استهلاك جميع الكميات التي يرغب بها من السلع، بل يواجه قيدًا ماليًا يتمثل في محدودية الدخل المتاح للإنفاق .

بناءً على ذلك، يتطلب من المستهلك تحقيق توازن بين رغبته في تعظيم مستوى الإشباع الكلي (المنفعة) التي يحصل عليها واستخدام موارده المالية المتاحة بكفاءة. ويتم ذلك عبر اختيار التركيبة المثلى لكميات السلع التي تتيح له تعظيم المنفعة في ظل الأسعار السائدة والدخل الذي بحوزته، بحيث لا يزيد مجموع الإنفاق على السلع عن قيمة الدخل الكلي.

يتم تمثيل هذه المشكلة رياضياً من خلال:

• دالة المنفعة : $U=f(x,y)$ (حيث U تمثل المنفعة و x, y كميات السلع)

• قيد الميزانية : $R=xPx+yPy$ حيث R هو الدخل، و Px, Py أسعار السلع.

بناء دالة لاغرانج

لحل مشكلة تعظيم المنفعة تحت قيد الميزانية، نقوم بإنشاء دالة لاغرانج كما يلي:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(R-xPx-yPy)$$

حيث λ هو مضاعف لاغرانج ويمثل التغير في المنفعة الناتج عن تغير هامشي في الدخل.

خطوات الحل:

- إنشاء دالة لاغرانج بدمج دالة الهدف (المنفعة) مع قيد الدخل باستخدام λ .
- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى للدالة الناتجة بالنسبة لكل متغير (λ, y, x)
- تسوية المشتقات بالصفر للحصول على نظام معادلات يحدد القيم المثلى لكل متغير.

التفسير الاقتصادي: يمثل الحل النقطة التي يحقق فيها المستهلك أعلى منفعة ممكنة دون تجاوز دخله المتاح.

تمرين توضيحي :

يملك مستهلك دخلاً مقداره $R=60$ وحدة نقدية، يرغب في توزيعه بين سلعتين x و y بحيث يحقق أكبر منفعة ممكنة. الأسعار هي $P_x=5$ و $P_y=10$ دالة المنفعة الكلية للمستهلك:

$$U(x,y)=x^2 \cdot y$$

المطلوب:

1. Tapez une équation ici. استخدم طريقة مضاعف لاغرانج (Lagrange Multiplier) لإيجاد

الكميات المثلى من السلعتين x و y التي تحقق أقصى منفعة ضمن قيود الدخل.

2. أحسب قيمة المنفعة المثلى عند هذا التوازن.

الحل:

1. صياغة المشكلة:

$$\max U(x,y)=x^2y \quad \text{الهدف:}$$

$$5x+10y=60 \quad \text{القيد:}$$

2. تكوين دالة لاغرانج:

$$L(x,y,\lambda)=x^2y+\lambda(60-5x-10y)$$

3. حساب المشتقات الجزئية:

من أجل تعظيم المنفعة بطريقة مضروب الغرونج يجب تحقق الشرطين التاليين:

الشرط الأول (اللازم): انعدام المشتقات الجزئية الأولى

نحسب المشتقات الجزئية لـ L بالنسبة لـ x ، y ، و λ ، ثم نسوي كل منها بالصفر:

• بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xy - 5\lambda = 0 \dots\dots\dots (1)$$

• بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x^2 - 10\lambda = 0 \dots\dots\dots (2)$$

• بالنسبة لـ λ

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 5x - 10y = 0 \dots\dots\dots (3)$$

إيجاد القيم المثلى:

من المعادلتين (1) و: (2)

$$2xy = 5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2xy}{5} \dots\dots\dots (1): \text{من}$$

$$x^2 = 10\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{x^2}{10} \dots\dots\dots (2): \text{من}$$

بالتساوي بين المجاهيل: λ

$$\Rightarrow 4y = x \Rightarrow x \frac{1}{4} = y$$

نعوض في قيد الميزانية:

$$5x + 10y = 60 \Rightarrow 5(4y) + 10y = 60 \Rightarrow 20y + 10y = 60 \Rightarrow 30y = 60 \Rightarrow 30y = 60 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 4y = 8 \quad \text{ثم}$$

4. حساب المنفعة المثلى:

$$U(8,2) = (8)2 \times 2 = 64 \times 2 = 128$$

وعليه:

• الكمية المثلى من السلعة $x = 8$

• الكمية المثلى من السلعة $y = 2$

• المنفعة القصوى: $U = 128$

الشرط الثاني (الكافي): المحدد الهيسي يكون موجبا.

يتكون المحدد الهيسي من المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاغرونج بالنسبة لنفس المتغيرات وب نفس الترتيب

السابق، وهو يأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$H = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0$$

حالة التندية :

الهدف : في وضعيات معينة، يسعى الفرد أو المؤسسة إلى تقليل قيمة دالة الهدف (مثل التكاليف أو المخاطر أو غيرها)، مع وجود قيد أو عدة قيود على الموارد أو الشروط الاقتصادية.

خطوات الحل

- تحديد دالة الهدف المراد تقليلها:

مثال: تقليل التكاليف الكلية للإنتاج أو تقليل المخاطر.

- كتابة القيد (أو القيود) المرتبطة بالمشكلة:

القيد يمكن أن يكون إجمالي الاستهلاك يجب أن يساوي مقدارًا محددًا أو أن الموارد المتاحة محدودة.

- تكوين دالة لاغرونج:

في حالة التندية، نُكتب دالة لاغرونج كما يلي:

$$L = x \cdot P_x + Y P_y + \lambda (UT - f(x, y)) \rightarrow Min$$

• إيجاد المشتقات الجزئية الأولى للدالة الناتجة بالنسبة لكل متغير (أي: λ, y, x)

• تسوية المشتقات بالصفر للحصول على نظام معادلات يحدد القيم المثلى لكل متغير.

- شروط الدرجة الأولى (الضرورية) :

لكي نجد القيم الحرجة X و Y و λ ، يجب تحقق أن المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرونج مساوية للصفر لكل متغير، كما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \rightarrow Px - \frac{\delta f}{\delta x} \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{Px}{\frac{\delta f}{\delta x}} \dots \dots \dots (01) \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 0 \rightarrow Py - \frac{\delta f}{\delta y} \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{Py}{\frac{\delta f}{\delta y}} \dots \dots \dots (02) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \rightarrow UT - f(x, y) = 0 \rightarrow \dots \dots \dots (03) \end{array} \right.$$

من (01) و(02) وبعد إجراء بعض الحسابات ثم نعوضها في (03) نجد قيم: x, y, λ .

شروط الدرجة الثانية (الكافية) (SOC) للتحقق من صحة النتائج الحاصل عليها نقوم بحساب المشتقات الجزئية الثانية لمضاعف لاغرانج لتحديد عناصر المصفوفة الهسيّة المخلوطة، والشروط الثانية للكفاية تتطلب أن يكون المحدد الهيسي أقل من الصفر، أي $\det(MHB) < 0$

اشتقاق دوال الطلب :

دوال الطلب تعبر عن العلاقة بين كمية السلعة التي يرغب المستهلكون في شرائها (عند كل مستوى من مستويات السعر)، مع افتراض بقاء العوامل الأخرى المؤثرة ثابتة. غالباً ما تصاغ هذه العلاقة رياضياً لتعكس تأثير عدة عوامل على الطلب.

- تكون دالة لاغرانج، نشتقها جزئياً، ونساوي المشتقات بالصفر.
- نحل النظام لنستخرج دوال الطلب (أي، العلاقة بين الكميات المطلوبة والأسعار والدخل).

مثال : حسب المثال السابق

$$xpx + ypy = R$$

$$x = \frac{R - ypy}{Px} \quad \text{دالة الطلب على السلعة}$$

$$y = \frac{R - xpx}{py} \quad \text{دالة الطلب على السلعة}$$

$$py = 10 \quad px = 5 \quad 60 = R \quad \text{نعوض قيمة الدخل}$$

التبادل :

يُقصد بالتبادل إمكان حدوث صفقة بين شخصين (أو أكثر) إذا أدت العملية إلى تحسين وضعيه أحدهما دون أن يسوء وضع الآخر، وهو ما يسمى بقاعدة التحسين الباريتي (Pareto Improvement) أي أن التبادل يكون مفيداً حين يستطيع كل طرف تحقيق منفعة أكبر دون إلحاق ضرر بالطرف الآخر.

جدول المنفعة الحدية الفردية:

تم عرض جدول يوضح المنفعة الحدية لكل وحدة مستهلكة من السلعتين X و Y لكل من المستهلك A والمستهلك B:

المستهلك (B)		المستهلك (A)		Q
UM _y (B)	UM _x (B)	UM _y (A)	UM _x (A)	
16	18	11	16	1
15	16	10	14	2
14	14	9	12	3
13	12	8	10	4
12	10	7	8	5
11	8	6	6	6
10	6	5	4	7
9	4	4	2	8

كل عمود يمثل المنفعة الحدية (UM) الناتجة عن استهلاك وحدات متتالية من كل سلعة لكل مستهلك.

نقطة الانطلاق (الاستبدال الأولي)

• المستهلك A: يمتلك (3X ; 6Y)

• المستهلك B: يمتلك (6X ; 3Y)

أي أن مجموع السلع المتوفرة: 9 وحدات من X و 9 وحدات من Y موزعة بينهما.

إذا كان التبادل سيتم وفق $1X = 1Y$ ، وكان هدف A و B هو تعظيم منفعتهم الفردية (أي البحث عن التخصيص الذي يعطي كل واحد منهم أكبر مجموع منفعة ممكن):

تحليل التبادل:

أ- ماذا يفضل كل مستهلك أن يعطي ويأخذ في التبادل؟

- حسب المنفعة الحدية: يفضل A تعويض وحدات من Y بوحدات من X أي لديه استعداد للتنازل عن Y مقابل X

• بينما B يفضل العكس، أي تعويض وحدات من X بوحدات من Y

أول خطوة تبادل:

إذا تنازل A عن وحدة واحدة من Y ، فإن الخسارة في المنفعة لديه تكون بمقدار (6) UMy ؛ ويعوضها بالحصول على وحدة من X ، تحقق له منفعة إضافية بمقدار (10) UMx ، أي الصافي +4.

أما B إذا تنازل عن وحدة من X ، يخسر (8) UMx ، ويأخذ وحدة من Y تكسبه منفعة (13) UMy ، فيكون الصافي +5.

يمثل ذلك في الجدول التالي:

A	B	
X	+10	-8
Y	-6	+13
ΔU_{Ti}	+4	+5

تتواصل عملية التبادل وفق نفس المنطق في مرحلة ثانية

A	B	
X	8+	10-
Y	7-	12+
ΔU_{Ti}	1+	2+

يستمر التبادل إلا إذا بقي مجموع التغير في المنفعة الكلية للمستهلكين موجباً، أي إذا وُجد فائض من التبادل (حالة تحسين باريتو).

A	B	
X	6+	12-
Y	8-	11+
ΔU_{Ti}	2-	1-

وبذلك تكون المرحلة الثانية المرحلة الأخيرة ، حيث ان الاستمرار التبادل بعد هذه المرحلة سوف يؤدي الى خسارة لكلا المستهلكين في النهاية يكون كلا المستهلكين في توازن عندما يكسبان :

المستهلك (A): (5 x ;4 y)

المستهلك (B) : (4 x ;5 y)

يتم التعبير عن شرط توقف التبادل رياضياً من خلال المقارنة بين معدل الإحلال الحدي بين السلعتين (أي نسبة المنفعة الحدية للسلعتين) لدى كل مستهلك:

يكون التبادل ممكناً إذا كان:

$$A \frac{UM_x}{UM_y} \neq \frac{UM_x}{UM_y} B$$

يكون التبادل غير ممكن إذا كان:

$$A \frac{UM_x}{UM_y} = \frac{UM_x}{UM_y} B$$

الاستنتاجات الأساسية:

- تستند قرارات التبادل إلى مقارنة المنافع الحدية الشخصي للسلعتين.
- تتحقق مكاسب التبادل عندما تكون المنفعة الحدية للعنصر الذي يتم الحصول عليه أكبر من المنفعة الحدية للعنصر المضحي به.
- تصل عملية التبادل إلى نهايتها حين تصبح مكاسب التبادل لصالح طرف دون الآخر صفراً أو حين لا يستطيع أحد تحسين وضعه دون التأثير سلباً على الآخر (أي بلوغ كفاءة باريتو).

عيوب نظرية المنفعة الكمية :

تعاني نظرية المنفعة الكمية (أو القياسية) في الاقتصاد الجزئي من العديد من العيوب والانتقادات التي حدّت من فعاليتها التحليلية، مما أدى إلى ظهور نظريات أكثر تطوراً مثل نظرية المنفعة الترتيبية ومنحنيات السواء.

أهم عيوب ونقائص نظرية المنفعة الكمية:

مشكلة القياس الكمي للمنفعة:

تفترض النظرية إمكانية قياس المنفعة عددياً باستخدام وحدة اصطلاحية مثل "utile" ، لكن في الواقع المنفعة هي شعور ذاتي أو نفسي لا يمكن قياسه بشكل دقيق أو مادي كما نقيس الوزن أو الطول.

البعد عن الواقع العملي:

أغلب المستهلكين لا يفكرون بمنطق حسابي أثناء اتخاذ القرار الاستهلاكي، ولا يقومون بإجراء حسابات للمنفعة الحدية لكل وحدة يستهلكونها، بل يعتمدون غالباً على تقدير وترتيب للتفضيلات بشكل عام.

عدم قابلية العديد من السلع للتجزئة:

تفترض النظرية أن السلعة قابلة للتجزئة إلى وحدات صغيرة لتحديد منفعتها الحدية، بينما في الواقع هناك العديد من السلع غير قابلة للتجزئة مثل السيارات أو الأجهزة الكبيرة.

مشكلة ثبات المنفعة الحدية للنقود:

يفترض التحليل الكلاسيكي ثبات المنفعة الحدية للنقود، وهو أمر غير واقعي إذ أن قيمة المنفعة الحدية للنقود تختلف بحسب ظروف المستهلك ومقدار دخله.

عدم صلاحية القانون الأول لتناقص المنفعة الحدية مع جميع السلع:

قانون تناقص المنفعة الحدية لا ينطبق بنفس الطريقة على كل السلع، خصوصاً السلع غير الغذائية أو تلك التي تتسم باستمرارية الطلب عليها لأسباب أخرى.

إغفال الفوارق الشخصية وتميز التفضيلات البشرية:

المنفعة الكمية تفترض إمكانية المقارنة بين المستهلكين وتوحيد طرق القياس رغم أن لكل شخص دوافع وحاجات مختلفة؛ وهذا يعيق إمكان التطبيق الواقعي للنظرية.

هذه العيوب دفعت اقتصاديين مثل "باريتو" و"سلوتسكي" إلى الانتقال نحو نماذج أكثر واقعية، مثل الاعتماد على ترتيب التفضيلات دون قياس منفعة رقمية، لتفسير سلوك المستهلك بشكل أدق وأكثر واقعية.