المحاضرة الثانية+ الثالثة

ثانيا: محفظة مالية مكونة من أصلين ماليين مخطريين

إضافة الى الفرضيات السابقة نؤكد على فكرة توزيع كل الثروة على الاستثمار للأصليين الماليين (A) و(B) دون اللجوء الى الاقتراض أي: $W_A + W_B = 1$

في هذه الحالة لدينا محفظة مالية مكونة من أصلين ماليين مخطرين A و B، يتميز كل أصل مالي بمعدل العائد ورجة الخطر الآتية:

$(E(R)_B \,, \delta_B)$،$(E(R)_A \,, \delta_A)$

1. عائد هذه المحفظة المالية:

هو المتوسط لعوائد الأصلين الماليين المكونين للمحفظة مرجحا بنسب توزيع الثروة داخل المحفظة. إذن يتأثر هذا العائد بـ:

* معدلات العائد لكل أصل مالي $(E(R)_A; E(R)_B)$.

* نسب توزيع الثروة داخل المحفظة المالية $(W_A; W_B)$ حيث مجموع النسبتين يساوي الواحد.

$$E(R)_{\mathrm{P}} = W_A E(R)_A + W_B E(R)_B \;\ldots.(*)$$
$$W_A + W_B = 1 \ldots (**)$$
$$E(R)_{\mathrm{P}} = W_A E(R)_A + (1 - W_A) E(R)_B$$

$$\boxed{\boldsymbol{E(R)_{\mathrm{P}}} = E(R)_B + (\,(E(R)_A - E(R)_B) W_A \;\ldots(1)}$$

تمثل المعادلة (1) عائد المحفظة المالية بدلالة نسبة الإنفاق على الأصل المالي A

2. درجة خطر هذه المحفظة المالية

يقيس التباين أو الانحراف المعياري درجة الخطر للمحفظة المالية، ويتحدد التباين من خلال:

- درجة خطر الأصول المكونة للمحفظة أي التباين لكل أصل مالي $\delta_A{}^2,\ \delta_B{}^2$.
- معامل الارتباط بين عوائد كل أصلين ماليين $r_{A,B}$.
- توزيع الثروة داخل هذه المحفظة أي المبلغ المستثمر في كل أصل مال W_A, W_B. ومنه

$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = W_A{}^2 \delta_A{}^2 + W_B{}^2 \delta_B{}^2 + 2 W_A W_B \delta_{A,B}$$

$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = W_A{}^2 \delta_A{}^2 + W_B{}^2 \delta_B{}^2 + 2 W_A W_B r_{A,B} \delta_A \delta_B$$

3–دراسة مختلف الحالات التي يأخذها معامل الارتباط

سنحاول تحليل تأثير معامل الارتباط على درجة الخطر في محفظة مالية مكونة من أصلين ماليين مخطرين:

الحالة الأولى: يوجد ارتباط موجب وتام بين عوائد الأصلين الماليين

$$r_{A,B} = 1$$

بالتعويض في معادلة الخطر (التباين) نجد:

$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = W_A{}^2 \delta_A{}^2 + W_B{}^2 \delta_B{}^2 + 2 W_A W_B \delta_{A,B}$$

$$r_{A,B} = 1 \Rightarrow \frac{\delta_{AB}}{\delta_A \delta_B} = 1 \quad \Rightarrow \delta_{AB} = \delta_A \delta_B$$

$$\delta_P^2 = {W_A}^2 {\delta_A}^2 + {W_B}^2 {\delta_B}^2 + 2W_A W_B \delta_A \delta_B$$

$$\delta_P^2 = (W_A \delta_A + W_B \delta_B)^2$$

$$\delta_P = W_A \delta_A + W_B \delta_B \ldots (*)$$

بافتراض عدم وجود إمكانية للاقتراض تكون نسب توزيع الثروة موجبة وبالتالي تكون العبارة $(*)$موجبة.

العلاقة بين العائد والخطر في هذه الحالة: لدينا

$$\boldsymbol{E(R)_P} = E(R)_B + (E(R)_A - E(R)_B)\boldsymbol{W_A} \ldots (1)$$

$$\delta_P = W_A \delta_A + W_B \delta_B \ \boldsymbol{\ldots (2)}$$

$$W_B = 1 - W_A$$

من المعادلة (2) نجد بعد تعويض W_B بـ $(1 - W_A)$:

$$\delta_P = W_A(\delta_A - \delta_B) + \delta_B$$

$$W_A = \frac{\boldsymbol{\delta_P} - \delta_B}{\delta_A - \delta_B}$$

$$\boldsymbol{E(R)_P} = E(R)_B + (E(R)_A - E(R)_B)\frac{\boldsymbol{\delta_P} - \delta_B}{\delta_A - \delta_B}$$

عد إجراء عمليات تبسيطية على هذه المعادلة نجد معادلة العائد بدلالة الخطر كمايلي:

$$\boldsymbol{E(R)_P} = \left[\frac{E(R)_A - E(R)_B}{\delta_A - \delta_B}\right]\boldsymbol{\delta_P} + \frac{E(R)_B \delta_A - E(R)_A \delta_B}{\delta_A - \delta_B} \ldots \boldsymbol{(3)}$$

معادلة العائد بدلالة الخطر، وهي معادلة مستقيم من الدرجة الأولى للدلالة على العلاقة الخطية بين العائد والخطر، حيث الميل موجب ويساوي :

$$\frac{\Delta \boldsymbol{E(R)_P}}{\Delta \boldsymbol{\delta_P}} = \frac{E(R)_A - E(R)_B}{\delta_A - \delta_B}$$

تتحدد إشارة الميل حسب قيم العائد للأصلين الماليين A و B وتبعا لذاك حسب درجة المخاطر للأصلين، وبما أن العلاقة المفترضة بين العائد والخطر المتوقعين هي علاقة طردية يكون الميل دائما موجب:

1- البسط والمقام موجبين

$$E(R)_A > E(R)_B \quad \Rightarrow \delta_A > \delta_B$$

2- البسط والمقام سالبين

$$E(R)_A < E(R)_B \quad \Rightarrow \delta_A < \delta_B$$

الحالة الثانية: يوجد ارتباط سالب وتام بين عوائد الأصلين الماليين

$$r_{A,B} = -1$$

بالتعويض في معادلة الخطر (التباين) نجد:

$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = {W_A}^2{\delta_A}^2 + {W_B}^2{\delta_B}^2 + 2W_AW_B\delta_{A,B}$$

$$r_{A,B} = -1 \;\; \Rightarrow \frac{\delta_{AB}}{\delta_A\delta_B} = -1 \quad \Rightarrow \delta_{AB} = -\delta_A\delta_B$$

$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = {W_A}^2{\delta_A}^2 + {W_B}^2{\delta_B}^2 - 2W_AW_B\delta_A\delta_B$$

$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = (W_A\delta_A - W_B\delta_B)^2$$

$$\delta_{\mathrm{P}} = W_A\delta_A - W_B\delta_B \dots (*)$$

$$\delta_{\mathrm{P}} = W_A(\delta_A + \delta_B) - \delta_B$$

يجب تحليل إشارة عبارة الخطر(العبارة (*))

$$\delta_{\mathrm{P}} = 0 \qquad W_A\delta_A - (1 - W_A)\delta_B = 0 \qquad W_A\delta_A - \delta_B + W_A\delta_B = 0$$

$$W_A = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}$$

1- نفترض أن $W_A > \frac{\delta_B}{\delta_A+\delta_B}$ في هذه الحالة تكون العبارة (*) موجبة وبإمكاننا كتابة العائد بدلالة الخطر:

$$\boldsymbol{E(R)_{\mathrm{P}}} = E(R)_B + (E(R)_A - E(R)_B)\boldsymbol{W_A} \dots (1)$$

$$\boldsymbol{\delta_{\mathrm{P}}} = W_A(\delta_A + \delta_B) - \delta_B \dots (\mathbf{2})$$

من المعادلة (2) نجد:

$$W_A = \frac{\boldsymbol{\delta_{\mathrm{P}}} + \delta_B}{\delta_A + \delta_B}$$

$$\boldsymbol{E(R)_{\mathrm{P}}} = E(R)_B + (E(R)_A - E(R)_B)\frac{\boldsymbol{\delta_{\mathrm{P}}} + \delta_B}{\delta_A + \delta_B}$$

بعد إجراء عمليات تبسيطية على هذه المعادلة نجد:

$$\boldsymbol{E(R)_{\mathrm{P}}} = \left[\frac{E(R)_A - E(R)_B}{\delta_A + \delta_B}\right]\boldsymbol{\delta_{\mathrm{P}}} + \frac{E(R)_A\delta_B + E(R)_B\delta_A}{\delta_A + \delta_B} \dots (\mathbf{3})$$

معادلة العائد بدلالة الخطر، وهي معادلة خطية من الدرجة الأولى، حيث الميل :

$$\frac{\Delta\boldsymbol{E(R)_{\mathrm{P}}}}{\Delta\boldsymbol{\delta_{\mathrm{P}}}} = \frac{E(R)_A - E(R)_B}{\delta_A + \delta_B}$$

تتحدد إشارة الميل حسب قيم العائد للأصلين الماليين A و B لأن المقام دائما موجب.

2- نفترض أن $W_A < \frac{\delta_B}{\delta_A+\delta_B}$ في هذه الحالة تكون العبارة (*) بالإشارة السالبة (حتى تكون القيمة موجبة) وبإمكاننا كتابة العائد بدلالة الخطر:

$$\boldsymbol{E(R)_{\mathrm{P}}} = E(R)_B + (E(R)_A - E(R)_B)\boldsymbol{W_A} \dots (1)$$

$$\delta_{\mathrm{P}} = -(W_A\delta_A - W_B\delta_B)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P}} = \delta_B - W_A(\delta_A + \delta_B) \ \ldots(\mathbf{4})$$

من المعادلة (4) نجد:

$$W_A = \frac{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P}} + \delta_B}{\delta_A + \delta_B}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})_{\mathbf{P}} = E(R)_B + (E(R)_A - E(R)_B)\frac{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P}} + \delta_B}{\delta_A + \delta_B}$$

بعد إجراء عمليات تبسيطية على هذه المعادلة نجد:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})_{\mathbf{P}} = \left[\frac{E(R)_B - E(R)_A}{\delta_A + \delta_B}\right]\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P}} + \frac{E(R)_A\delta_B + E(R)_B\delta_A}{\delta_A + \delta_B} \ \ldots(\mathbf{5})$$

معادلة العائد بدلالة الخطر، وهي معادلة خطية من الدرجة الأولى، حيث الميل :

$$\frac{\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})_{\mathbf{P}}}{\Delta\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P}}} = \frac{E(R)_B - E(R)_A}{\delta_A + \delta_B}$$

تتحدد إشارة الميل حسب قيم العائد للأصلين الماليين A و B لأن المقام دائما موجب، غير أنها بالضرورة معاكسة لإشارة المعادلة (3) .

الحالة الثالثة: يوجد ارتباط غير تام بين عوائد الأصلين الماليين

$$r_{A,B} \neq 1 \quad , \qquad r_{A,B} \neq -1$$

في هذه الحالة تتميز المحفظة المالية بمايلي:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})_{\mathbf{P}} = E(R)_B + (E(R)_A - E(R)_B)\boldsymbol{W_A} \ \ldots(1)$$

$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = {W_A}^2{\delta_A}^2 + {W_B}^2{\delta_B}^2 + 2W_AW_B\delta_{A,B}$$

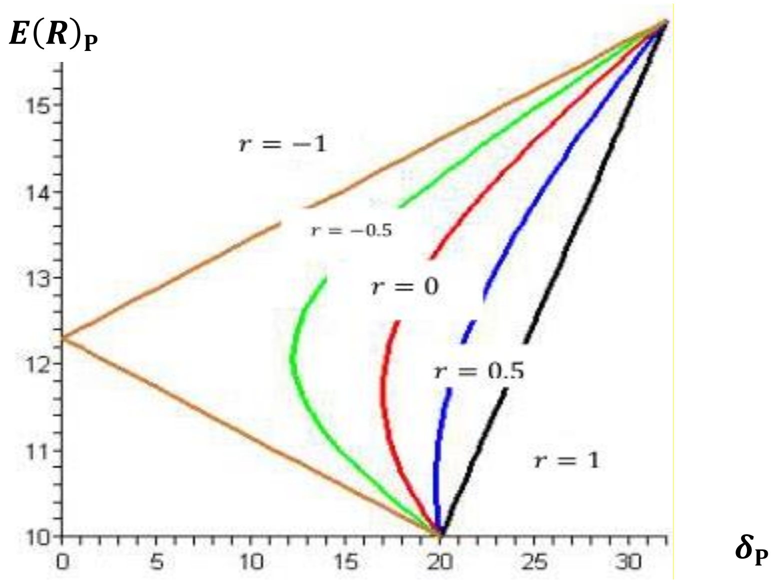
$$\delta_{\mathrm{P}}^2 = {W_A}^2{\delta_A}^2 + {W_B}^2{\delta_B}^2 + 2W_AW_Br_{A,B}\delta_A\delta_B$$

واذا أردنا كتابة العائد بدلاة الخطر وبعد بتباع خطوات رياضية يمكن ايجاد العائد بدلالة الخطر من الشكل:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})_{\mathbf{P}} = a\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{2}} + b\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P}} + c$$

وهي معادلة قطع مكافئ، يتميز الميل في هذه الحالة بكونه متغير ودرجة تغيره تعبر عن درجة تحدب المنحنى

إن العلاقة بين معامل الارتباط وتحدب منحنى العائد والخطر هي علاقة عكسية، حيث كلما انخفضت قيمة معامل الارتباط زاد تحدب المنحنى نحو المحور العمودي، والشكل التالي يلخص مختلف الحالات السابقة بافتراض قيم مختلفة لمعامل الارتباط.



$E(R)_P$
$r = -1$
$r = -0.5$
$r = 0$
$r = 0.5$
$r = 1$
δ_P
10
11
12
13
14
15
0
5
10
15
20
25
30