(2)

1

المحور الأول: التحليل التوفيقي.

(أداة هذه الأداة حساب الاحتمالات مستقبلا)

تذكير:

تعريف عملية العاملي: (عاملي n): $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\times \cdots \times 2 \times 1}$$

أيضا:

$$\boxed{(n+1)! = (n+1) \times n!}$$

خواص:

- $0! = 1$ و $1! = 1$
- $n! = n\times(n-1)! = n\times(n-1)\times(n-2)!$

مثال 1:

$$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1$$
$$= 5\times 4! \longrightarrow$$ (كتبنا 5 عاملي بدلالة عاملي 4)

مثال 2: تبسيط العبارة:

$$a = \frac{100!}{99!}$$

$$b = \frac{2}{5!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{3!}$$

- $a = \dfrac{100!}{99!} = \dfrac{100 \times \cancel{99!}}{\cancel{99!}} = \boxed{100}$

- $b = \dfrac{2}{5!} - \dfrac{2}{4!} + \dfrac{2}{3!}$

بتوحيد المقامات :

(5! مقام مشترك)

$$b = \frac{2 - (2\times 5) + (2 \times 4 \times 5)}{5!}$$

$$\boxed{b = \frac{32}{120}}$$

مثال 3 :

$$c = \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n+1)!}$$

نلاحظ أنه يمكننا كتابة $(2n+1)!$ على الشكل التالي :

$$(2n+1)! = (2n+1) \times (2n) \times (2n-1)!$$

إذن : بتوحيد المقامات نجد :

$$c = \frac{1 \times (2n) \times (2n+1) + 1}{(2n+1)!}$$

1) عدد القوائم:

p و n عددان طبيعيان حيث: $n \geq 1$, $p \geq 1$

عدد القوائم لـ p عنصر من بين n هو: كل اختيار لـ p عنصر مرتبة (مع إمكانية التكرار) من بين n وهو $\boxed{n^p}$

حيث: p هو عدد العناصر المختارة

n هو عدد العناصر المتوفرة.

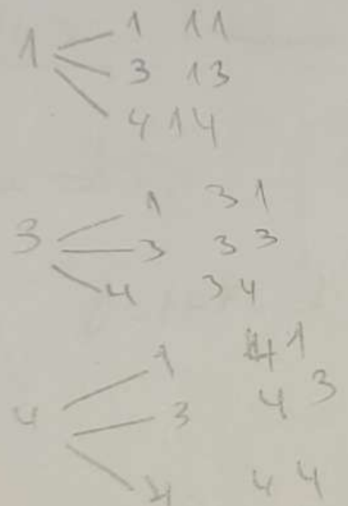
مثال: نعتبر المجموعة $E = \{1,3,4\}$

ما هو عدد الأعداد المكونة من رقمين مأخوذين من E؟

لدينا: $n=3$, $p=2$:

$$3^2 = 9$$

الجواب: يوجد 9 أعداد مكونة من رقمين مأخوذين من بين 3



2) الترتيبة: نسمي ترتيبة لـ p عنصر من بين n كل إختيار لـ p عنصر مرتبة ومختلفة (بدون تكرار) من بين n.

عدد الترتيبات لـ p عنصر من بين n هو:

عدد العناصر

$$\boxed{A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}$$

العناصر المتوفرة

مثال 1: $E = \{1, 3, 4\}$

ماهو عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذين من (E).

$$A_3^2 = 3 \times (3-2+1) = 3 \times 2 = \boxed{6}$$

مثال 2: أحسب: A_{10}^3

لدينا:

$$n - p + 1 = 10 - 3 + 1 = 7 + 1 = 8$$

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = \boxed{720}$$

إمكانية

أي توجد 720 حالة لإختيار 3 عناصر مرتبة ومختلفة من بين 10 (بدون عملية تكرار)

ملاحظة 1 :

نتيجة لعدم التكرار خاصة : $p \leq n$.

ملاحظة 2 :

إذا كان $p = n$ فإن العدد A_n^n : يسمى عدد التبديلات لـ n عنصر

و $\boxed{A_n^n = n!}$

ملاحظة 3 : يمكن التعبير عن العدد A_n^p بواسطة عملية العاملي :

$$A_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

مثال: اعادة حساب A_{10}^{3}

بواسطة عملية العاملي:

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10\times 9\times 8\times \cancel{7!}}{\cancel{7!}}$$

(نستطيع بواسطة الآلة الحاسبة)

$$= 10\times 9\times 8 = \boxed{720}$$

3) التوفيقة: نسمي توفيقة لـ p عنصر من بين n (حيث n و p عددات طبيعيات غير معدومين $p \leq n$) كل اختيار لـ p عنصر من بين n (بدون ترتيب و بدون تكرار)

عدد التوفيقات:

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

7

مثال: $E = \{1, 3, 5\}$

ماهو عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين مأخوذة من E ؟

(لايوجد في المجموعة الجزئية التكرار والترتيب غير موجود)

$\{1,3\}$ ، $\{1,5\}$ ، $\{3,5\}$ (3 احوال)

إذن:

$$C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{6}{2!} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

ملاحظة: حسب ما سبق

$$\boxed{C_n^p = \frac{n \times (n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}}$$

أو:

$$C_n^p = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \Rightarrow$$

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}}$$

مع: $1 \leq p \leq n$.

مثال: حساب: C_{10}^{3} ؟

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!}$$

$n - p + 1 = 10 - 3 + 1 = 8$

$$= \frac{10 \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4}}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 10 \times 3 \times 4 = \boxed{120}$$

إذن: عدد التوفيقات لـ 3 عناصر من بين 10 بدون ترتيب وبدون تكرار

هو 120 حالة.

خواص:

- $\boxed{C_{n}^{n} = 1}$
- $\boxed{C_{n}^{1} = n}$
- $\boxed{C_{n}^{0} = 1 \quad , \quad (p=0)}$
- $\boxed{C_{n+1}^{n} = n+1}$

9

تطبيق : حل في $\mathbb{N}$ المعادلة :

$$2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$$

لدينا : نعلم أن : $p \leq n$ $\Leftarrow$

$$n \geq 3 \Leftarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \geq 3 \end{cases}$$

تقاطع

لدينا :

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{p!}$$

$$\Rightarrow 2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$$

$$\cancel{2}\left[\frac{n(n-1)}{\cancel{2!}}\right] + \cancel{6}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{\cancel{3!}}\right] = 9n$$

$n-3+1=(n-2)$

$n-2+1=(n-1)$ نتوقف

$$\Rightarrow n(n-1) + n(n-1)(n-2) = 9n$$

بما أن $n \geq 3$ إذن نستطيع القسمة على n ومنه نجد :

$$\Rightarrow (n-1) + (n-1)(n-2) = 9 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -2 \notin \mathbb{N} \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

نشر ثنائي الحد (قانون نيوتن Newton) :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b وأي عدد طبيعي n فإن :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} \cdot b^p}$$

تمرين 1 : أنشر باستعمال قانون Newton :

- $(x+1)^5$
- $(x-2)^6$

الحل 1 :

$$(x+1)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_n^p \, a^{n-p} \cdot b^p \qquad \begin{pmatrix} a = x \\ b = 1 \end{pmatrix}$$

$$= C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4(1) + C_5^2 x^3(1)^2 + C_5^3 x^2(1)^3 + C_5^4 x(1)^4 + C_5^5 (1)^5$$

$$= \boxed{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}$$

١١

$\bullet (x-2)^6 = (x+(-2))^6$ $\begin{pmatrix} a = x \\ b = -2 \end{pmatrix}$

$= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5(-2) + C_6^2 x^4 (-2)^2 + C_6^3 x^3 (-2)^3 + C_6^4 x^2 (-2)^4$

$+ C_6^5 x(-2)^5 + C_6^6 (-2)^6$

أكمل الحساب

تمرين 2 :

ما هو معامل x^4 في نشر $(2x^2+1)^6$ ؟

لدينا :

$C_n^p a^{n-p} \times b^p$

$C_6^p (2x^2)^{6-p} \times (1)^p = C_6^p 2^{(6-p)} \times x^{(12-2p)}$

إذن نضع :

$12 - 2p = 4$

$\Rightarrow \boxed{p = 4}$

وبالتالي لدينا الحد :

$C_6^4 2^{(6-4)} \times (x)^{(4)}$

إذن معامل x^4 هو :

$C_6^4 \times 2^2 \Rightarrow$

12

$$C_6^4 = \frac{6\times5\times4\times3}{\underset{4\times3\times2}{4!}} = \frac{6\times5}{2} = 15$$

ومنه

$$C_6^4 \times 2^2 = 15\times4 = \boxed{60}$$

تمرين 3

أحسب المجموع :

$$S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p \times 1\times1\right)$$

$$(a=1,\ b=1)$$

$$S_1 = (1+1)^n = \boxed{2^n}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \underbrace{(1)}_{a}^{n-k} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{b}^{k}$$

ومنه حسب Newton :

$$S_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

تمرين4: أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع الآتي:

$$S_n = C_{n+1}^{2}\, 3^2 + C_{n+1}^{3}\, 3^3 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}\, 3^{n+1}$$

$$S_n = C_{n+1}^{0}\, 3^0 + C_{n+1}^{1}\, 3^1 + C_{n+1}^{2}\, 3^2 + C_{n+1}^{3}\, 3^3 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}\, 3^{n+1} - \left(C_{n+1}^{0}\, 3^0 + C_{n+1}^{1}\, 3^1\right)$$

باستعمال قانون Newton:

$$= (1+3)^{n+1} - \left(1 + (n+1)\cdot 3\right)$$

$$= (4)^{n+1} - 1 - 3n - 3$$

$$\boxed{S_n = 4^{n+1} - 3n - 4}$$