المحور الثالث: الدوال الأسية واللوغاريتمية

I) الدوال الأسية:

- هناك دالة وحيدة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث:

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

تعرف بالدالة الأسية ذات الأساس e ونرمز لها بـ e^x.

ونكتب

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $e^x > 0$

$$]-\infty, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$
$$x \longrightarrow e^x$$

خواص الدالة الأسية: من أجل كل عددين حقيقيين a, b: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

و $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $e^a \times e^b = e^{a+b}$

2) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

3) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

4) $(e^a)^n = e^{na}$

5) $e^0 = 1$, $e^1 = e$

مشتقة الدالة $f(x)=e^{g(x)}$:

$$\boxed{f'(x)=g'(x)\,e^{g(x)}}$$

1) $f(x)=e^{x^2+3x+1} \Rightarrow f'(x)=(2x+3)\,e^{x^2+3x+1}$

← أمثلة: عين مشتقات ما يلي :

2) $f(x)=e^{\cos x} \Rightarrow f'(x)=(-\sin x)\,e^{\cos x}$

3) $f(x)=e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}$

← تمرين: ① $f(x)=e^x$ ، ② $f(x)=e^{ax}$ احسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f'''(x)$ ، $f^{(4)}(x)$

و استنتج $f^{(n)}(x)$ المشتقة النونية :

① $f(x)=e^x$ ، $f'(x)=e^x$ ، $f''(x)=e^x$ ، $f'''(x)=e^x$

$f^{(4)}(x)=e^x$

و منه المشتقة النونية : $\forall n\in\mathbb{N}$

$f^{(n)}(x)=e^x$

② $f(x) = e^{ax} \Rightarrow f'(x) = ae^{ax}$

$f''(x) = a^2 e^{ax}$

$f'''(x) = a^3 e^{ax}$ ، $f^{(4)}(x) = a^4 e^{ax}$

⋮

$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \rightsquigarrow p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نبرهن على صحة $p(n)$ باستعمال البرهان بالتراجع . (متروك للطالب) .

من أجل $n=1$ $f'(x) = ae^{ax}$ محققة

نفرض $p(n)$ محققة من أجل $\forall n \in \mathbb{N}$

و نبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل $n+1$

لدينا

$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \quad / \forall n \in \mathbb{N}$

$f^{(n+1)}(x) = f'[f^{(n)}] = \left(a^n e^{ax}\right)' = a^n \cdot a e^{ax}$

$f^{(n+1)}(x) = a^{n+1} e^{ax} \rightsquigarrow p(n+1)$

من أجل $(n+1)$ $p(n+1)$ صحيحة إذن $p(n)$ محققة .

حالات الخاصة بـ e^x : يكون حل المعادلة من الشكل الآتي كالتالي :

قبل حل أي معادلة أو متراجحة يجب البحث أولا عن مجموعة التعريف D_f

1) $e^a = e^b \Rightarrow a = b$

2) $e^{a} = b$, $b > 0$

$\Rightarrow a = \log b$

3) $e^{a} = b$, $b \leq 0$ $\Rightarrow$ مستحيل .

أمثلة: حل المعادلات التالية :

1) $e^{2x} + 3 = 0$

$\Rightarrow e^{2x} = -3$ $\Rightarrow$ مستحيل ✓

2) $e^{-2x+1} - 1 = 0$

$\Rightarrow e^{-2x+1} = 1 = e^{0} > 0$

$\Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +\frac{1}{2}}$ ✓

3) $2e^{2x-1} - 3e^{-x+2} = 0 \Rightarrow 2e^{2x-1} = 3e^{-x+2}$

$\frac{e^{2x-1}}{e^{-x+2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow e^{(2x-1)-(-x+2)} = \frac{3}{2} \Rightarrow e^{3x-3} = \frac{3}{2} > 0$

$\Rightarrow 3x - 3 = \log\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{3 + \log\left(\frac{3}{2}\right)}{3}}$ ✓

4) $e^{2x} - 2e^x = 0 \Rightarrow e^x(e^x - 2) = 0$

$\begin{cases} e^x = 0 \longrightarrow \text{مرفوض} \quad (e^x > 0 \text{ لأن}) \\ e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \log 2} \end{cases}$

(5) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

نضع: $e^x = y \quad (y > 0)$

$\Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

$\Delta = 25 - 4(6) = 1$ $\quad \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

وبما أن $e^x = y$

$\Rightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ e^x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log 2 \\ x = \log 3 \end{cases}$

الصيغة ذات الأساس a:

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0$

- $2^x = e^{x \ln 2}$
- $2^{-x} = e^{-x \ln 2}$

• $x^x = e^{x \ln x}$

$$\sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln a}$$

#

III الدوال اللوغاريتمية: الدالة $f(x) = \log(g(x))$

f تكون معرّفة إذا كانت

$$g(x) > 0$$

الخواص:

هذا أجل $\forall a, b > 0$ ، $n \in \mathbb{N}$

1) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

2) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

3) $\log(a^n) = n \log a$

أيضا لدينا:

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$$
$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log a$$

المشتقة:

$$f(x) = \log(g(x))$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

أمثلة:

$f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \log(4x-2) \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{4x-2}$

$f(x) = \log(\sin x) \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

• المعادلات: قبل حلّ أيّ معادلة يجب تعيين مجال التعريف؛ حيث:

- $\log a = \log b \Rightarrow a = b \quad (a>0, b>0)$
- $\log a = b \Rightarrow a = e^{b}, (a>0)$

أمثلة :

1) $\log(2x-1)-1=0$

• $D_f = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $\quad (2x-1>0)$

$\log(2x-1)=1 \Rightarrow 2x-1=e^1$

$\Rightarrow \boxed{x=\frac{e+1}{2}}$

2) $\log(x-1)^2=9$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\quad ((x-1)^2 \geq 0$ و $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1)$

$\Rightarrow (x-1)^2 = e^9$

$x-1=\pm\sqrt{e^9}$

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{e^9} \\ x=1-\sqrt{e^9} \end{cases}$$

3) $2(\log x)^2-3(\log x)+1=0$, $D_f=]0,+\infty[$

نضع : $\log x = y$

$\Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$

$\Delta = 1$

$y = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$y = \log x$

$\Rightarrow \begin{cases} \log x = 1 \\ \log x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \\ x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \end{cases}$

#