المحور الثاني: المتتاليات العددية.

1) تعريف: نسمي متتالية عددية (u_n) كل دالة أو تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعية نحو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، التي ترفق لكل عدد طبيعي n.

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow u_n$$

- نرمز عادة لمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو اختصارا (u_n)

ملاحظة: 1) $u_0, u_1, u_2, \ldots$ أعداد حقيقية تسمى حدود المتتالية.

2) نسمي الحد u_n بالحد العام للمتتالية (u_n).

- تحديد المتتالية: تكون المتتالية معرفة إما:

1) بمعرفة مجموعة عناصرها.

2) بمعرفة الحد العام.

3) بمعرفة حدها أو حدودها السابقة (علاقة تراجعية)

مثلة:

1) $(u_n) = \{1, 2, 3, 5, \ldots\}$

2) $u_n = 2n+1$

3) $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$

المتتالية المحدودة:

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى إذا وجد M $(\exists M\in\mathbb{R})$ بحيث: $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n \leq M$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل إذا وجد $m\in\mathbb{R}$ $(\exists m\in\mathbb{R})$ بحيث: $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n \geq m$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل $\left(\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ m \leq u_n \leq M\right)$

(3) إتجاه تغير متتالية (رتابة متتالية عددية): $u_0 > 0$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1} \geq u_n$ $(q \geq 1)$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1} \leq u_n$ $0 < q \leq 1$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ ثابتة إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$ $(q = 1)$

(جميع الحدود متساوية)

مثال:

1- المتتالية $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ متناقصة تماما.

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

ومنه $u_{n+1} < u_n$; $\forall n \neq 1$

$\forall n \neq 1$

4) المتتاليات المتقاربة: المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نحو $\ell \in \mathbb{R}$ إذا كان: $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ، وإذا وجدت النهاية فهي وحيدة.

- وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فهي متباعدة.

مثال: - المتتالية $u_n = \frac{5}{n}$ تتقارب نحو الصفر لأن: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

- المتتالية $u_n = n^2 + 1$ متباعدة لأن: $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

• نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة وتؤول للعدد ℓ إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} , \forall n \geq n_0$$
$$\Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

المتتالية الحسابية :

• تعريف : نسمي متتالية حسابية ذات الأساس r ، كل متتالية (u_n) تحقق :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = u_n + r$$ (حيث r عدد حقيقي غير معدوم)

أمثلة :

1) $0, 1, 2, 3, \dots$ ، $r = 1$

2) $1, 3, 5, 7, \dots$ ، $r = 2$

3) $1, 5, 9, 13, \dots$ ، $r = 4$

صيغة الحد العام : لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

فإن :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

البرهان : بما أن (u_n) حسابية :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = u_n + r$$

$$\Rightarrow u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = u_0 + nr}$$

نعم يبرهن بالتراجع

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \boxed{u_n = u_0 + nr}$$

مثال:

1) $0, 1, 2, 3, \dots, n$

2) $1, 3, 5, 7, \dots, 1+2n$

3) $1, 5, 9, 13, \dots, 1+4n$

تمرين: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r

برهن:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p$$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n \quad ?$$

الحل: لدينا:

$$u_p = u_0 + pr$$

$$u_{n-p} = u_0 + (n-p)r$$

$$\Rightarrow u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n-p)r)$$

$$= u_0 + pr + u_0 + nr - pr$$

$$= u_0 + \underbrace{u_0 + nr}_{u_n}$$

$$= \boxed{u_0 + u_n} \quad \#$$

* مجموع حدود متتالية حسابية: (u_n) حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r:

$S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) \dots$

$\Rightarrow$

مجموع حدود متتالية حسابية $=$ عدد الحدود $\times$ $\frac{\text{(الحد الأول + الحد الأخير)}}{2}$

مثال: احسب المجموع التالي:

$$M = 11 + 15 + 19 + \dots + 2007$$

الجواب: هي متتالية حسابية أساسها 4

~~$u_0 = 11$~~

~~$u_n = 45$~~

$$M = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (11 + 2007)$$

عدد الحدود $= ?$

$u_0 = 11$

$u_n = 2007$

$u_n + nr = 2007 \Rightarrow 11 + 4n = 2007 \Rightarrow n = \frac{2007 - 11}{4} =$

عدد الحدود = (دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول) + 1

$n+1 = 499+1$

$= \boxed{500}$

إذن عدد الحدود :

↓

(1) ملاحظة :

حاصل مجموع الحدود = (عدد الحدود) × (الحد الأول + الحد الأخير) / 2

ومنه :

$$M = \frac{500}{2}(11+2007)$$

الوسط الحسابي : (خاصية أساسية) :

لتكن متتالية حسابية u_0, u_1, u_2

a, b, c ثلاثة حدود متتالية بهذا الترتيب لمتتالية حسابية

$a \; b \; c$

$$a+c = 2b$$

ذكرة الوسط الحسابي

نأخذ 3 حدود متتالية

(عندما نجمع الحدين الذين في الطرفين نحصل دائما ضعف الحد في الوسط

تمرين :

(u_n) متتالية حسابية

$u_0 = 1$

$u_1 + u_3 = 14$

عين أساس هذه المتتالية

عين u_2 ثم احسب الأساس r و حدد اتجاه الحل

الحل: بما أن (u_n) متتابعة حسابية فإن

a b c
u_1 u_2 u_3

$\Rightarrow \quad u_1 + u_3 = 2u_2$

ولدينا:

$u_1 + u_3 = 14$

إذن: $u_2 = \frac{14}{2} = 7$

• البحث الأساس:

$u_n = u_0 + rn$

$n = 1 \Rightarrow u_2 = u_0 + 2r$

$7 = 1 + 2r$

$\Rightarrow \boxed{r = \frac{6}{2}}$

$\boxed{r = 3}$ الأساس هو:

أيضا الحد العام:

$u_n = u_0 + nr$

$\boxed{u_n = 1 + 3n}$

المتتالية الهندسية :

• تعريف : (u_n) متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q ثابت بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; \boxed{u_{n+1} = q u_n}$$

q يسمى أساس المتتالية .

• خاصية الحد العام : لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0 : فإن $\boxed{u_n = u_0 q^n}$

• مجموع حدود متتالية هندسية : (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0 :

$$M_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

دليل الحد الأخير − الحد الأول + 1

مجموع حدود هندسية = الحد الأول $\left(\frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - (\text{الأساس})} \right)$

الوسط الهندسي -

ثلاثة حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية هندسية: a , b , c

$$\text{مربع الحد الأوسط} = \text{جداء الحدود في الأطراف}$$

$$b^2 = a \times c$$

$$ac = b^2$$

مثال:

مثال 1: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 \cdot u_3 = 16 \end{cases}$$

حسب u_2 ثم الأساس q.

(u_n) هندسية معناه:

$$u_1 \cdot u_3 = u_2^2$$

ولدينا:

$$16 = u_2^2$$

$$\begin{cases} u_2 = +4 \\ u_2 = -4 \end{cases}$$

إذن: $u_2 = 4$ (لأن حدودها موجبة)

$(u_n = u_0 \times q^n)$

$u_2 = u_0 \times q^2$ حسب العلاقة

$\Rightarrow 4 = 1 \times q^2 \Rightarrow q^2 = 4$

$\Rightarrow q = \pm 2$

$\Leftarrow$ $q = 2$ أو $q = -2$ مرفوض

(لأن الحدود كلها موجبة (ما دام كل الحدود موجبة إذن الأساس موجب))

وإذن عبارة الحد العام:

$u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = 1 \times 2^n = 2^n$

التمرين 1: أودع طالب في صندوق التوفير في سنة 1999 مبلغا قدره 8900 دج بفائدة 14% سنويا.

كم يصبح المبلغ سنة 2011.

~~الحل:~~

لدينا: $u_0 = 8900$

بعد سنة:

$$u_1 = u_0 + \frac{u_0 \times 14}{100}$$

$$= u_0 (1 + 0,14) \Rightarrow \boxed{u_1 = u_0 (1,14)}$$

بعد سنتين:

$$u_2 = u_1 + \frac{u_1 \times 14}{100} = u_1 (1,14)$$

$$= \boxed{u_0 (1,14)^2}$$

بعد 3 سنوات:

$$u_3 = u_2 + \frac{u_2 \times 14}{100}$$

$$= u_2 (1,14) = \boxed{u_0 (1,14)^3}$$

بعد سنة: $u_1 = u_0 (1,14)$

" سنتين: $u_2 = u_0 (1,14)^2$

" 3 سنوات: $u_3 = u_0 (1,14)^3$

إذن: بعد n سنة

$$\boxed{u_n = u_0 (1,14)^n}$$

(u_n) هندسية أساسها $q = 1,14$

سنة 2011 ← ترتيب الحد

$$u_{12} = u_0 (1,14)^{12}$$

$$= \boxed{8900 (1,14)^{12}}$$ Ac