المحور الخامس: الدوال الأصلية وحساب التكامل والمساحات

① الدالة الأصلية :

لتكن f دالة معرّفة على مجال I ، نسمّي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F :

① F قابلة للاشتقاق على I

② من أجل كل x من I لدينا : $\boxed{F'(x) = f(x)}$

الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة :

الدالة f	الدالة الأصلية F
0	c
a	$ax + b$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{1}{x^n}$ ، $n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$

الدالة f	الدالة الأصلية F
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
e^x	$e^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$

ملاحظة : إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن كل الدوال الأصلية لـ f على I هي

$\boxed{F(x) + C}$

حيث : C عدد ثابت وحقيقي.

f المشتقة	F الدالة الأصلية
$g'(x)\cdot[g(x)]^n$	$\frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{g'(x)}{[g(x)]^n}$	$-\frac{1}{(n-1)[g(x)]^{n-1}}+C$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$	$2\sqrt{g(x)}+C$
$g'(x)e^{g(x)}$	$e^{g(x)}+C$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln\lvert g(x)\rvert+C$
$g'(x)\cos g(x)$	$\sin g(x)+C$
$g'(x)\sin g(x)$	$-\cos g(x)+C$

مثال على (الدالة الأصلية)

① $f(x) = x^2 + 4x + 5$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 5x = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x$$

② $f(x) = \frac{1}{x}$

$$F(x) = \ln x$$

③ $f(x) = \cos x$

$$F(x) = \sin x$$

④ $f(x) = (2x - 1)(3x + 2)$

$$= 6x^2 + 4x - 3x - 2$$

$$f(x) = \frac{6}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2 - 2x$$

مثال 2:

① $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$F(x) = \frac{-1}{x} + C$

② $f(x) = \frac{-3}{x^5}$

$f(x) = -3\left(\frac{-1}{4x^4}\right) + C$

$F(x) = \frac{3}{4x^4} + C$

مثال 3:

① $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$F(x) = \frac{2\sqrt{x}}{2} + C$

$F(x) = \sqrt{x} + C$

$f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \xrightarrow{\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}} \Rightarrow F(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{g(x)}} + C$

③ $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{5x+4}}$ ③ $\Rightarrow F(x) = ?$

$g(x)$

$g'(x) ? = 5$

$f(x) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{5\, g'(x)}{2\sqrt{5x+4}}\right)$ $\quad \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{5}\sqrt{5x+4} + c$

④ $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+7}} \rightarrow \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$

$\Rightarrow F(x) = 2\sqrt{3x+7} + c$

مثال 4:

① $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$ $\quad \left(\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right)$

$F(x) = \ln|2x+3| + c$

② $f(x) = \dfrac{5}{3x+1} \Rightarrow F(x) ?$

$f(x) = \frac{5}{3}\left(\frac{3}{3x+1}\right)$ $\frac{g'(x)}{g(x)}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{5}{3}\ln|3x+1| + c}$

مثال 5:

① $f(x) = 2xe^{x^2}$ $(g'(x)e^{g(x)})$

$\boxed{f(x) = e^{x^2} + c}$

② $\boxed{f(x) = 5e^{3x} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{3}(3e^{3x})}$

$\boxed{F(x) = \frac{5}{3}e^{3x} + c}$

③ $f(x) = \sin 2x$

$f(x)\ \frac{1}{2}(2\sin 2x)$ $g'(x)\sin g(x)$

$\boxed{F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + c}$

$f(x) = \cos 3x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(3\cos 3x)$ $g'(x)\cos g(x)$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + c}$

(21)

٤) حساب التكامل : (غير محدود) :

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f ، نكتب :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

(تكامل غير محدود = (الدالة الأصلية + c))

خواص:

① $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$

② $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

مثال 1 :

① $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

② $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c$

③ $\int (-3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 8)\,dx$

$$= -\frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + c$$

④ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

⑤ $\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + c$

⑥ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$

⑦ $\int \sqrt{x}\,dx = \int (x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

⑧ $\int e^x\,dx = e^x + c$

⑨ $\int \sin x^2\,dx$ $(-g'(x)\sin g(x)) \to +\cos g(x)$

$= \cos(x^2) + c$

⑩ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

مثال 2: أحسب التكامل الآتي:

$$\int \left(\frac{4x^4 + 5x^2 + 3x}{2x^2}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{4x^4}{2x^2} + \frac{5x^2}{2x^2} + \frac{3x}{2x^2}\right) dx = \int \left(2x^2 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\ln x + c$$

الطرق العامة في الاستكمال: نعتمد على بعض الطرق إذا كانت صيغة $f(x)$ لا تمثل مشتقا لدالة معلومة، وأهم هذه الطرق اثنتان:

1- طريقة تحويل متغير:

لحساب التكامل $\int f(x)dx$ نقوم بتحويل مناسب على المتغير، فنضع:

$x = g(t)$ حيث:

f دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق، تصبح $dx = g'(t)dt$ بالتعويض في صيغ التكامل:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

ملاحظة:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

($df(x)$: تفاضل $f(x)$، dx: تفاضل x)

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

($df(x)$: تفاضل $f(x)$، $f'(x)$: مشتق $f(x)$، dx: تفاضل x)

$f(x) = t$
$df(x) = dt$
$f'(x)dx = dt$

في جميع التكاملات التالية باستعمال تغيير متغير: نضع

مثال 1: احسب التكامل التالي:

$$\int \frac{(\log x)^4}{x} dx \ ?$$

نفرض:

$$\log x = t$$

$$d(\log x) = dt$$

$$\frac{1}{x} dx = dt$$

$df(x) = f'(x)dx$

ومنه:

$$\int \frac{(\log x)^4}{x} dx = \int (\log x)^4 \left(\frac{1}{x} dx\right)$$

$$= \int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5} + c = \boxed{\frac{(\log x)^5}{5} + c}$$

مثال 2:

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx$$

نفرض:

$$\boxed{\sin x = t}$$

$$d(\sin x) = dt \Rightarrow \boxed{\cos x \, dx = dt}$$

ومنه:

$$\Rightarrow \int \sin^3 x \cos x \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + c$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}(\sin x)^4 + c}$$

$$= \frac{2x^2}{2} + x + 3\ln(x+1) + c = \boxed{x^2 + x + 3\ln(x+1) + c}$$

II) درجة البسط أكبر من درجة المقام (أو تساويه):
نستعمل القسمة الاقليدية.

مثال 1 : أحسب التكامل التالي:

$$\int \frac{2x^2+3x+4}{x+1}\,dx$$

باستعمال القسمة الاقليدية لدينا:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$

$q(x)$: حاصل القسمة — $\frac{h(x)}{g(x)}$: الباقي

$2x^2+3x+4$	$x+1$
$-2x^2-2x$	$2x+1$ ← $q(x)$
$x+4$	
$-x-1$	
3 ← $h(x)$	

$$\int \left(\frac{2x^2+3x+4}{x+1}\right)dx = \int \left((2x+1) + \frac{3}{x+1}\right)dx$$

تذكير (الكسور الجزئية):

أ) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام:

ب) إذا كان المقام يحتوي على معادلة من الدرجة الثانية قابلة للتحليل (أقواسه من الدرجة الأولى غير مكررة)

مثال:

$$\frac{4x+21}{x^2+3x-4} = \frac{4x+21}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

ج) إذا كان المقام يحتوي على معادلة من الدرجة 2 قابلة للتحليل (أقواسه من الدرجة الأولى مكررة):

مثال:

$$\frac{6x^2-28x+33}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

د) إذا كان المقام يحتوي على أقواس من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليل

مثال:

$$\frac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{x^2+1}$$

$x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$

هـ) إذا كان المقام يحتوي على أقواس من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليل ومكررة

مثال:

$$\frac{3x^3-x^2+19x-9}{x^4+18x^2+81} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+d}{(x^2+9)^2}$$

ملاحظة: (في حالة المقام من الدرجة الأولى):

التكامل الذي من

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx$$

نضع (باستعمال تغيير متغير):

$$\boxed{t = ax+b}$$

$$dt = d(ax+b)$$

$$dt = a\,dx$$

$$\boxed{dx = \frac{dt}{a}}$$

يعني:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \int \frac{1}{t}\left(\frac{dt}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{a}\log(t) + c$$

$$= \frac{1}{a}\log(ax+b) + c$$

مثال 3:

$$\int x \sin(2x^2+3)\,dx$$

نعوض:

$$2x^2+3 = t$$

$$d(2x^2+3)\,dx = \int \cancel{x}\sin t \,\frac{dt}{4\cancel{x}}$$

$$\int \sin t \,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \sin t\,dt = \frac{1}{4}(-\cos t) + c$$

ج- جذر مضاعف:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$\boxed{x+\frac{b}{2a} = t}$$

$$dx = dt$$

ومنه:

$$\boxed{ax^2+bx+c = at^2}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{a\,t^2}\,dt = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{t}\right) + c$$

$$= \boxed{\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{x+\frac{b}{2a}}\right) + c}$$ #

أحسب $\int \frac{1}{x^2-4x+4}$

$x^2-4x+4 \Rightarrow \Delta = 16-16 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

نضع :

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix}}$$

$$x^2-4x+4=t^2$$

إذن :

$$\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx=\int \frac{1}{t^2}\,dt=-\frac{1}{t}+c$$

$$=\boxed{-\frac{1}{x-2}+c}$$

ملاحظة في المثال:

$$\int \frac{3x}{x^2-4x+4}\,dx \; ?$$

الحالة: $\Delta>0$ لكثير الحدود ax^2+bx+c جذرين x_1, x_2:

$$\Rightarrow \boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

ومنه :

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha}{x-x_1}+\frac{\beta}{x-x_2}\right)$$

- بعد توحيد المقامات و المطابقة نجد α و β و منه :

$$\int \frac{1}{ax+bx+c}\,dx = \frac{1}{a}\left[\alpha \int \frac{1}{x-x_1}\,dx + \beta \int \frac{1}{x-x_2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\alpha \log(x-x_1) + \beta \log(x-x_2)\right] + C$$

مثال : أحسب $\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx$ ؟

$x^2+4x-5 \Rightarrow \Delta = 16+20 = 36 > 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -5$

$a(x-x_1)(x-x_2)$

و منه : $x^2+4x-5 = (x-1)(x+5)$

يعني

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+5)}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2+4x-5} = \frac{1}{(x-1)(x+5)} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x+5)}$$

توحيد المقامات :

$$\frac{\alpha(x+5)+\beta(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{\alpha x + 5\alpha + \beta x - \beta}{(x-1)(x+5)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)x + (5\alpha-\beta)}{(x-1)(x+5)} = \frac{1}{x^2+4x-5}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 & -(1) \\ 5\alpha-\beta=1 & -(2) \end{cases}$$

$\Leftarrow (1)+(2)$

$$6\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{6}}$$

بالتعويض في (1):

$$\boxed{\beta = -\frac{1}{6}}$$

ومنه:

$$\frac{1}{x^2+4x-5} = \frac{1/6}{x-1} + \frac{-1/6}{x+5}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5}\right]}$$

إذن:

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx = \frac{1}{6}\left[\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+5}\,dx\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\left[\log(x-1) - \log(x+5)\right] + C}$$

تمرين: أحسب التكامل التالي:

$$\int \frac{2x^2+6x}{x^2+4x-5}\,dx$$

مزل

$$\frac{2x^2+6x}{(x-1)(x+5)} \searrow a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+5}$$

٤- التكامل بالتجزئة :

لتكن f ، g دالتين قابلتين للإشتقاق على I ، بحيث الدالتين المشتقتين f' و g' مستمرتان على I : و منه :

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

تمرين : باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات الآتية :

1) $\int x e^x dx$

2) $\int x \cos x\, dx$

3) $\int x^2 e^x dx$

4) $\int x \log x\, dx$

5) $\int x \log x\, dx$

الجواب :

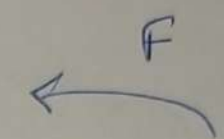
1) $\int x e^x dx$ (نختار x و e^x)

$$\begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$$

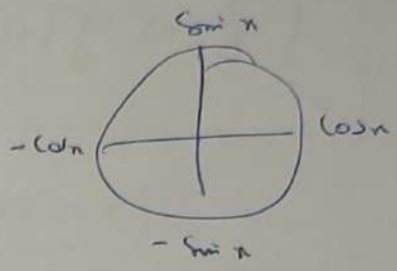
$$\Rightarrow \int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$= \boxed{e^x(x-1)+c}$$

2) $\int x\cos x\,dx$ (كثير حدود $\times$ $\cos x$ / $\sin x$)



$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \sin x \end{cases}$$



$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot \sin x\,dx$$

$$= \boxed{x\sin x + \cos x + c}$$

3) $\int x^2 e^x\,dx$ ($\underbrace{\text{كثير حدود}}_{f} \times \underbrace{e^x}_{g'}$)

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x \\ g(x) = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \underbrace{\int 2x e^x dx}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f' = 2 \\ g(x) = e^x \end{cases}$$

$$= x^2e^x - \left[2xe^x - \int 2\cdot e^x dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = \boxed{e^x(x^2 - 2x - 2) + c}$$