المحور الرابع الاستمرارية والاشتقاقية

I الاستمرارية:

1- الاستمرارية عند نقطة: f دالة معرفة على مجال D_f يشمل x_0

f مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2) الاستمرارية على يمين x_0: f دالة معرفة عند x_0 وعلى يمين x_0

f مستمرة على يمين x_0 إذا كان:

$$\lim_{x \geq x_0} f(x) = f(x_0)$$

3) الاستمرارية على يسار x_0: f معرفة عند x_0 وعلى يسار x_0

f مستمرة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x < x_0} f(x) = f(x_0)$$

* f دالة معرفة عند x_0 وفي جوار x_0، f مستمرة إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x \geq x_0} f(x) = \lim_{x < x_0} f(x) = f(x_0)$$

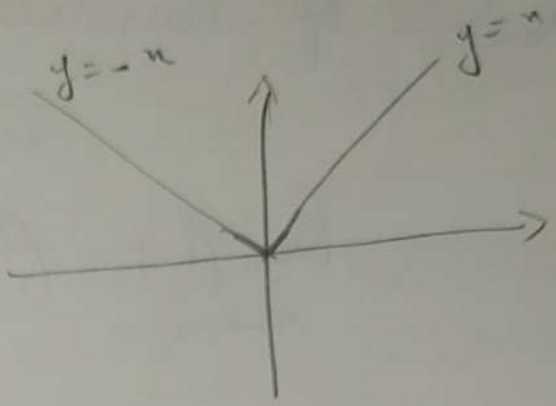
مثال 1: لتكن f الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = |x| \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

f مستمرة عند $x_0 = 0$ لأن:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$$



و:

$$f(0) = |0| = 0$$

ملاحظة: • الدوال كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$، sin، cos مستمرة أيضا على $\mathbb{R}$

• الدوال الناطقة مستمرة عند كل قيمة x لا تعدم المقام.

مثال 2: لندرس استمرارية الدالة التالية عند $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & , x < 1 \\ x^2 + x - 3 & , x \geq 1 \end{cases}$$

II) الإشتقاقية :

1) قابلية الإشتقاق عند x_0 :

تعريف : f معرّفة عند x_0 ، تكون f قابلة الإشتقاق عند x_0 إذا كانت النهاية التالية موجودة :

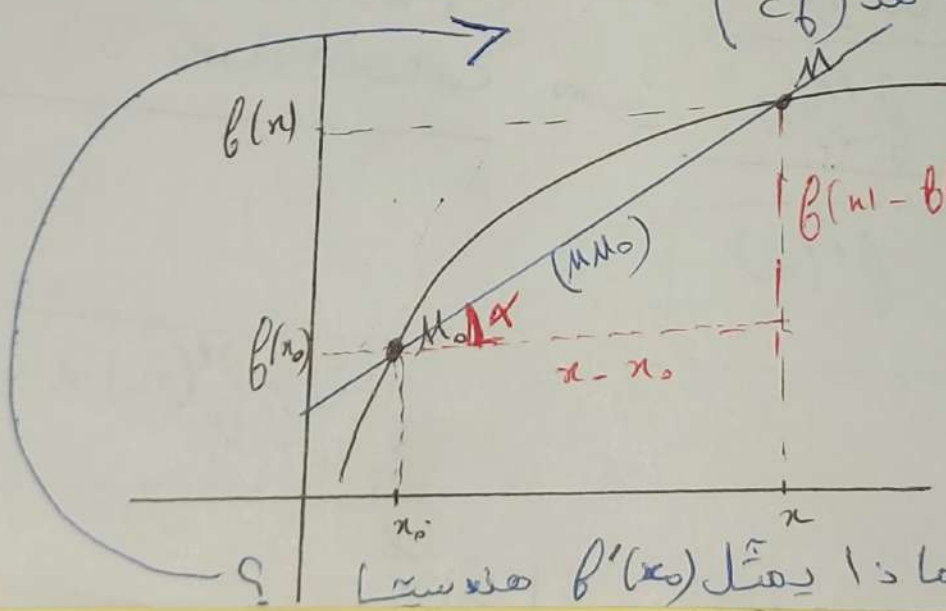
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

هذه النهاية تسمّى "العدد المشتق للدالة f عند x_0" في حالة وجودها :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

- **التفسير الهندسي :** إذا كانت لدينا الدالة f معرّفة وقابلة للإشتقاق x_0 ، و (C_f) يمثل الدالة f

M ، M_0 نقطتان من (C_f)



- نريد أن نعرف ماذا يمثل $f'(x_0)$ هندسيا ؟

لدينا:

$$\lim_{x \to 1^{<}} f(x) = \lim_{x \to 1^{<}} (x-2) = \boxed{-1}$$

و:

$$\lim_{x \to 1^{\geq}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\geq}} (x^2 + x - 3) = \boxed{-1}$$

و:

$$f(1) = 1^2 + 1 - 3 = \boxed{-1}$$

بما أن:

$$\lim_{x \to 1^{<}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\geq}} f(x) = f(1)$$

- $x_0 = 1$ عند f مستمرة :إذن

نحن نعلم أن ميل المماس (MM_0) هو $\tan\alpha$ (α زاوية الميل):

$$\tan\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- لما x يؤول إلى x_0 يأخذ المستقيم (MM_0) وضعية نهائية وهي ما يسمى بالمماس (Δ) لـ (C_f) عند x_0.

يعني أن ميل المماس هو:

$$\lim_{\substack{x>x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

(لأن ما قبلها لا تشتق)

- يعني أن $f'(x_0)$ هو ميل المماس (Δ) لـ (C_f) عند x_0.

نبحث على معادلة المماس (Δ):

المعادلة العامة للمماس (Δ) هي $y=ax+b$ لأن المماس عبارة عن (مستقيم) لكن a هو ميل المستقيم (Δ) ونحن نعلم أن ميل المماس هو $f'(x_0)$:

$$a = f'(x)$$

وعليه:

$$\boxed{y = f'(x_0)x + b}$$

- بما أن $M_0(x_0, f(x_0))$ تنتمي إلى (Δ) يعني $f(x_0) = ax_0 + b$ (تحقق المعادلة)

ولدينا $a = f'(x_0)$ يعني

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

وعليه:

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

- نعوض b في $y = f'(x_0)x + b$ نحصل على:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$= \boxed{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

- ومنه معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند x_0:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

إذن $f'(x_0)$ يمثل ميل المماس عند x_0 (هذا هو التفسير

2) حساب مشتقات الدوال المرجعية :

1) $f(x) = a \quad (a \in \mathbb{K}) \longrightarrow f'(x) = 0$ [مثال: $f(x)=5 \Rightarrow f''(x)=0$]

2) $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

مثال :

$f(x) = x^3 \quad (n=3)$

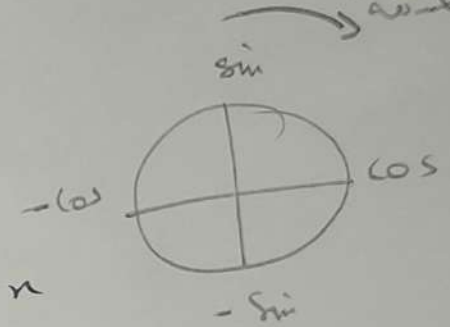
$f'(x) = 3x^2$

3) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \longrightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

4) $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

6) $f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\sin x$



• مبرهنة القيم المتوسطة :

f معرفة ومستمرة على $[a;b]$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإن المعادلة $f = k$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[a;b]$.

- حالة خاصة $k=0$: إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[a,b]$.

- ملاحظة : في البرهنة السابقة إذا كانت الدالة f رتيبة على المجال $[a,b]$ (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) فإن المعادلة

$f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا على $[a,b]$.

مثال : نعتبر الدالة : $f(x)=x^3-3x+1$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1) بين أن المعادلة $f(x)=2^k$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[1,2]$.

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[-2,-1]$.

الحل:

[1,2]

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (مستمرة كثيرة حدود)

- $f(a) = f(1) = \boxed{-1}$
- $f(b) = f(2) = \boxed{3}$

ومنه نجد أن: $f(a) = -1 < k = 2 < f(b) = 3$

إذن: المعادلة $f(x) = 2$ تقبل على الأقل حلاً على المجال $[1,2]$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة)

2) $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً على $[-2,-1]$

$f(a) \times f(b) < 0$?

$f(a) = f(-2) = -8 + 6 + 1 = \boxed{-1}$

$f(b) = f(-1) = \boxed{3 > 0}$

إذن: $f(a) \times f(b) = -3 < 0$

هل f رتيبة ؟

تدرس جدول تغيرات f:

- $f'(x) = 3x^2 - 3$

إشارة $f'(x)$

- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad (a=3, b=0, c=-3)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ (مميز) $\rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

x	$-\infty$	-2	$[a$	-1	$b]$	1	$+\infty$
f'		+		−		+	
f		↗		↘		↗	

تزايدة تماما

إذن رتبة

ومنه نستنتج أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على $[-1$

نظرية : إذا كانت f ، g قابلتين للاشتقاق عند x_0 فإن :

① λf قابلة للاشتقاق عند x_0 ، حيث λ عدد حقيقي غير معدوم و

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

② $f+g$ قابلة للاشتقاق عند x_0 ،

$$(f+g)' = f' + g'$$

③ $f \cdot g$ " " " " "

$$(fg)' = f'g + g'f$$

④ $\left(\frac{1}{g}\right)$ " " " " "

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

⑤ $\frac{f}{g}$ " " " " "

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

تطبيقات خاصة :

① $f(x) = (g(x))^m$

$$\Rightarrow f'(x) = m\left(g(x)\right)^{m-1} g'$$

مثال :

$f(x) = (x^2+4x+5)^4$

$f'(x) = 4(x^2+4x+5)^3(2x+4)$

② $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

مثال: $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+1}$

$f'(x) = \frac{-(2x+4)}{(x^2+4x+1)^2}$

③ $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

مثال: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

④ $f(x) = \sin(g(x))$

$f'(x) = g'(x)\cos(g(x))$

مثال: $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2\cos 2x$

⑤ $f(x) = \cos(g(x))$

$f'(x) = -g'(x)\sin(g(x))$

مثال: $f(x) = \cos 3x$

$f'(x) = -3\sin(3x)$

$f(x) = \frac{1}{g^m}$

$f'(x) = \left(\frac{-m g'}{g^{m+1}}\right)$

$\left(\left(\frac{1}{x^m}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-m}{x^{m+1}}\right.$

تمرين: أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات.

1) $f(x) = (x^2+3x)(x^2+1)^2$

2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

3) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

4) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

5) $f(x) = \sin(x^2)$

6) $f(x) = \sin^2 x$

7) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

8) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

9) $f(x) = \tan^2 x$

10) $f(x) = \cos^2 3x$

الحل:

$(g^2(x))' = 2g^{2-1} \cdot g'$

1) $f(x) = \underbrace{(x^2+3x)}_{f}\underbrace{(x^2+1)^2}_{g}$ $\quad [fg]' = f'g + g'f$

$f'(x) = (2x+3)(x^2+1)^2 + \underbrace{2(x^2+1)\cdot 2x}_{g'(x)}(x^2+3x)$

$= (x^2+1)\left[(2x+3)(x^2+1) + 4x(x^2+3x)\right]$

$= (x^2+1)(6x^3+15x^2+2x+3)$ //

(2) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow$ [illegible]

$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

$f'(x)=\frac{-(1-x)'}{(1-x)^2}=\boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$ #

(3) [illegible] مشتق

(4) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2\cdot(1-x)'}{(1-x)^3}=\frac{-2(-1)}{(1-x)^3}$

$\left(\frac{1}{g^2}\right)'=\frac{-2g'}{g^{2+1}}$

$\left(\frac{1}{g^n}\right)'=\frac{-ng'}{g^{n+1}}$

$\boxed{f'(x)=\frac{2}{(1-x)^3}}$

(5) $f(x)=\sin x^2$ $(\sin g(x))$, $g(x)=x^2$

$f'(x)=g'(x)\cos g(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x)=2x\cos(x^2)}$

$=(x^2)'\cos x^2$

(5) $f(x) = \sin(x^2)$ $\sin(g(x))$ $\Rightarrow$ $f'(x) = g'(x)\cos(g(x))$

$= (x^2)' \cos(x^2)$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$

(6) $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2 = (g(x))^2$

$f'(x) = 2(g(x))^{2-1} \cdot g'(x) = 2(\sin x) \cdot \cos x$

(7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x+1})' \cdot x - (x)' \sqrt{x+1}}{x^2}$

$(\sqrt{x+1})' = \dfrac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1}}{x^2}$

$= \dfrac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{x^2} = \dfrac{\frac{x - 2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{x^2}$

$= \dfrac{x - 2x - 2}{2\sqrt{x+1}} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \boxed{\dfrac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}}$

(8) $f(x) = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\cdot \sin x}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$ $\left(\text{já: } \cos^2 x + \sin^2 x = 1\right)$

(9) $f(x) = tg^2 x = (tg\,x)^2$

$\hookrightarrow f'(x) = 2\,tg\,x\,(tg\,x)' = \boxed{2\,tg\,x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}$

(10) $f(x) = \cos^2(3x)$ $\left(g^m(x)\right)$

$\hookrightarrow f'(x) = 2\cos(3x)\left(\cos(3x)\right)' = 2\cos(3x)\left(-3\sin(3x)\right)$

$= \boxed{-6\cos(3x)\sin(3x)}$

(6) $f(x) = \sin^2 x$ $\left(g^2(x)\right)$

$\hookrightarrow f'(x) = 2(\sin x)(\sin x)' = \boxed{2\sin x\cos x}$

المشتقات المتتابعة:

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق فإن f' تسمى المشتقة الأولى.
- " " f' " " " f'' " " الثانية.
- " " f'' " " " f''' أو $f^{(3)}$ تسمى المشتقة من الرتبة الثالثة.
- إذا كانت $f^{(n-1)}$ " " $f^{(n)}$ تسمى المشتقة من الرتبة n (المشتقة النونية)

ملاحظات:

① $f^{(n)} \neq f^n$

② $f^{(0)} = f$

③ $\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$

مشتقة الدالة المركبة: $u \circ v$

- إذا قبلت u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وقبلت الدالة v الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن $u \circ v$ تقبل الاشتقاق على I ومن أجل كل x من I فإن:

$$f(x) = u \circ v(x) \Rightarrow \boxed{f'(x) = u'(v) \cdot v'}$$

مثال 1:

$f(x) = \sqrt{x^2+1} = u \circ v \Rightarrow f'(x) = u'(v) \cdot v'$

حيث u دالة مرجعية

- $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $v(x) = x^2+1 \Rightarrow v'(x) = 2x$

$\Rightarrow f'(x) = u'(v) \cdot v' = \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{\underbrace{x^2+1}_{v}}}\right)}_{u'(v)} \cdot \underbrace{2x}_{v'}$

مثال 2:-

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x+1\right) = u \circ v$

$\Rightarrow f'(x) = u'(v) \cdot v'$

- $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$
- $v(x) = \frac{\pi}{2}x+1 \Rightarrow v'(x) = \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}x+1\right)}_{u'(v)} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{v'}$