المحور الخامس : المعادلات التفاضلية

تمهيد :

① نسمي كل معادلة من الشكل

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$

معادلة تفاضلية من الرتبة n . حيث : $y = f(x)$ و $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ المشتقات المتتابعة .

② نسمي $y = f(x)$ حلا لـ (1) إذا تحقق

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

- نتناول [illegible] : بشكلين فقط :

الشكل ① :

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين

[illegible]

الشكل ② : المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات حقيقية .

ملاحظة : حل معادلة تفاضلية معناه البحث عن $y = ?$ حيث

I) المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين :

- الشكل العام لهذه المعادلات :

$$\boxed{g(y)\,y' = f(x)}$$

f و g دوال مستمرة

- طريقة حل هذه المعادلات :

$$g(y)\,y' = f(x)$$

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

وفي الأخير نبحث عن y.

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y^2}dy = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{y} = \log x + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = -\log x - c$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{\log x + c}}$$

$$\int \frac{1}{y^n}dy = \frac{-1}{(n-1)y^{(n-1)}} + c$$

$$\int \frac{dx}{x}\left(\frac{g'}{g}\right) = \log x + c$$

$\frac{g'}{g^n}$

ملاحظة: هنالك أنواع أخرى للمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى:

1- $y' = ay + b$ حلها يكون من الشكل: $\boxed{y = ce^{ax} - \frac{b}{a}}$

2) $y' = f(x)$ " " " "

$$y = \int f(x)dx$$

$$\boxed{y = F(x) + c}$$

c: عدد حقيقي ثابت كيفي

الشكل 2 : المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات حقيقية بدون طرف ثاني .

الشكل العام :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

a , b , c أعداد حقيقية .

طريقة الحل :

① نبحث عن المعادلة المميزة :

$y = e^{rx}$
$y' = re^{rx}$
$y'' = r^2e^{rx}$

$$ar^2 + br + c = 0$$

② نقوم بحساب :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta = 0$ ، $r_1 = r_2 = r$

الحل العام هو :

$$y = (c_1 x + c_2)e^{rx}$$

• $\boxed{\Delta > 0}$, r_1, r_2

الحل العام هو :

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

=

$\boxed{\Delta < 0}$ $\boxed{r = \alpha \pm i\beta}$ → (partie Reel) (الجزء الحقيقي) (جذران مركبان مترافقان)

→ (partie Imaginaire) (الجزء التخيلي)

$\sqrt{\Delta} = \square i^2$ (r_1) و (r_2)

$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta} i}{2a}$

الحل العام هو :

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

المثال : (1)

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$\Delta = (6)^2 - 4(1)(9) = 0 \; , \; r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (c_1 x + c_2) e^{3x}} \; , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

تمرين 1 :

(1

$$y' - y(x^2+2x-1) = 0$$

$$y' = y(x^2+2x+1)$$

$$\frac{y'}{y} = x^2+2x-1$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y} = x^2+2x-1$$

$$\frac{dy}{y} = (x^2+2x+1)dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + c$$

$$y = e^{\frac{x^3}{3}+x^2-x+c}$$

(2

$$xy^2y' - 1 = 0$$

$$xy^2y' = 1 \Rightarrow y^2y' = \frac{1}{x}$$

$$y^2\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow y^2dy = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{y^3}{3} = \ln x + c \Rightarrow y^3 = 3(\ln x + c) = 3\ln x + c$$

$$y = \sqrt[3]{3\ln x + c}$$

(3

II) المعادلة = التفاضلية من الرتبة الأولى المتجانسة.

الشكل العام:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

طريقة الحل:

نضع: $z = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow y = zx$$

$$y' = z'x + x'z \; ; \; y' = z'x + z$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z'x + z = f(z)$$

$$z'x = f(z) - z$$

$$\frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{x}$$

م. ت. 1 ذات متغيرين منفصلين

ثم نبحث عن z وفي الأخير نرجع $y = zx$

مثال 1:

$$xy' - y + x = 0$$

$$xy' = y - x$$

$$y' = \frac{y}{x} - 1$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

من الشكل:
1. ت.م
(متجانسة)

نضع: $z = \frac{y}{x} - 1 \Rightarrow y = zx + x$

$z = \frac{y - x}{x}$

$zx = y - x$

$y = zx + x$

$y' = z'x + z + 1$

$\Rightarrow z'x + z + 1 = z$

$z'x = -1$

$z' = \frac{-1}{x}$

م.ت.ا
ذات متغيرين منفصلين

$\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{x} \Rightarrow dz = \frac{-dx}{x} \Rightarrow \int dz = \int -\frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow z = -\log x + C$

ومنه:

$y = (-\log x + C)x$