الفصل الثاني: الدوال ذات متغيرين.

1) تعريف: تسمى دالة ذات متغيرين كل دالة معرفة على المجموعة:

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث ترفق بكل ثنائية (x,y) عدد وحيد z ونكتب:

$$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

مثال:

- $f_1(x,y) = x^2y - yx - 5x - 2y + 1$

- $f_2(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - x + y - 3)$

- $f_3(x,y) = \dfrac{x-7}{2x-3y-2}$

2) المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى: f دالة ذات متغيرين (x,y)، تكون المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f بالنسبة للمتغير x ودالة باعتبار y ثابتة ونرمز لها بـ:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

أما المشتقة الجزئية من المرتبة الأولى للدالة f بالنسبة للمتغير y ودالة باعتبار x ثابتة ونرمز لها بـ:

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

مثال 1:

$$f(x,y) = x^2y - yx + x - y - 3$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y + 1$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - x - 1$$

مثال 2:

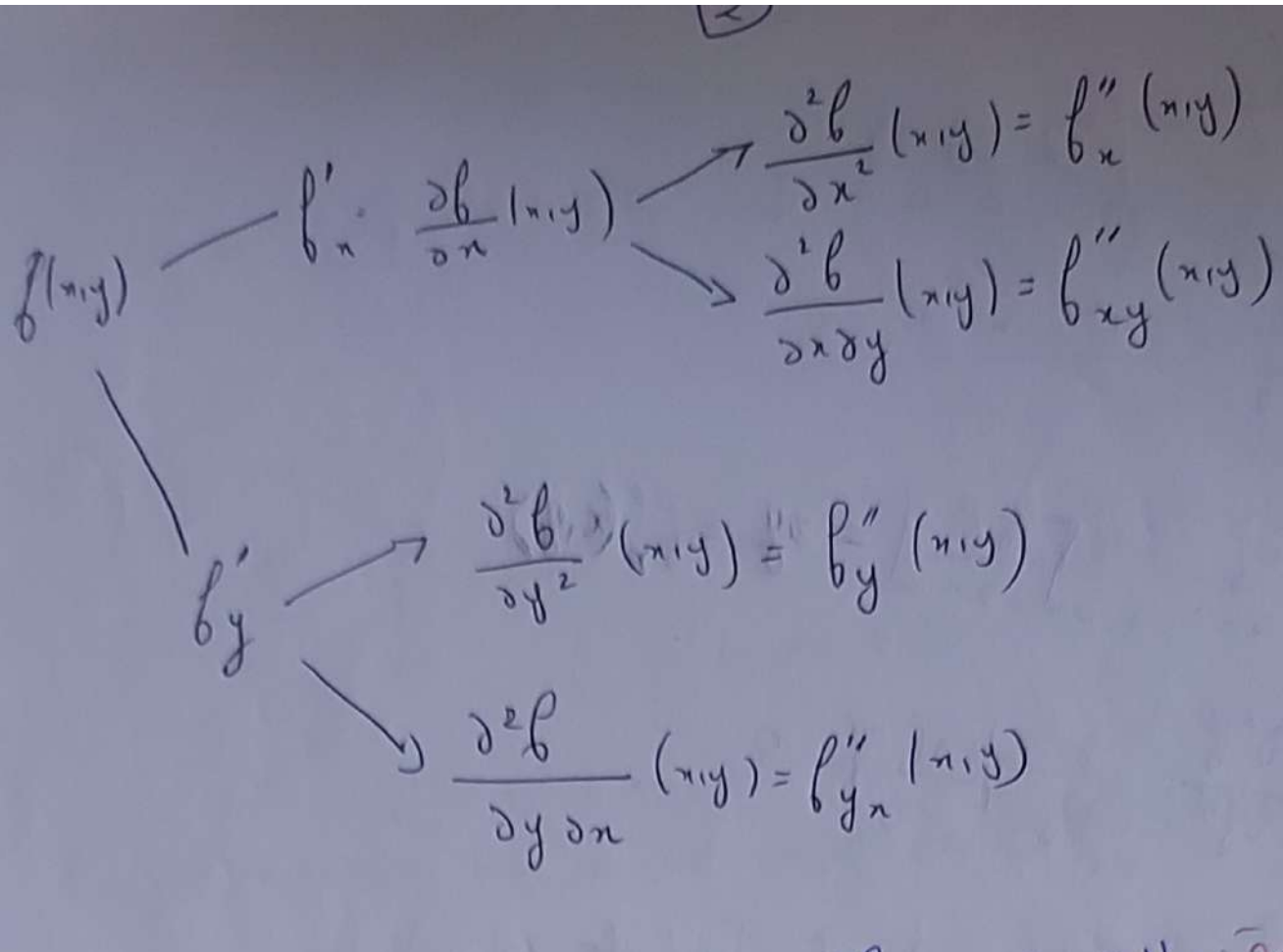
$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - x + 1)$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2-x+1)'_x}{(x^2+y^2-x+1)} = \frac{2x-1}{x^2+y^2-x+1}$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2-x+1}$$

3) المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية:

إذا كانت f دالة ذات متغيرين والدالة f لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى فإنه لها مشتقات جزئية تسمى مشتقات جزئية من الرتبة الثانية وتكون وفق المخطط الآتي:



ملاحظة: الرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ يعني المشتقة مرتين بالنسبة لـ x.

y لـ " " " " $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ " .

الأول لـ x ثم بالنسبة لـ y " " $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ " .

" " الأول لـ y ثم " " لـ x " " $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ " .

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ وهما تسمى "المشتقة المختلطة"

(إذا كانت الدالة f ومشتقاتها مستمرة)

مثال:

إذا كان

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 2y = f''_x(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = 2x - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 2x - 1$$

#

الحد الأدنى والأقصى لدالة ذات متغيرين:

نقول أن $f(x,y)$ تقبل قيمة حدية قصوى (حد أقصى) أو قيمة حدية دنيا (حد أدنى) إذا تحقق:

شرط ضروري (شرط المرتبة الأولى)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \longrightarrow (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \longrightarrow (2) \end{cases}$$

أما الشرط الكافي هو:

$$\alpha = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

- $\alpha > 0$: نعم تقبل قيم قصوى (أو دنيا)
- $\alpha = 0$: لا يمكن الاتحديد
- $\alpha < 0$: لا تقبل قيم قصوى (ولا دنيا)

• إذا كانت $\alpha > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ ⇐ القيمة الحدية هي قيمة حدية دنيا (حد أدنى)

• إذا كانت $\alpha > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ ⇐ " " " " قصوى

مثال 1:

$f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy + 2x - 8y - 1$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 2 \quad | \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 = A$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y - 2x - 8 \quad | \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 = B$

بوجود كل مرحلة

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 = C$ (طبيعة القيم الحدية)

$\alpha = A \times B - C^2 = 8 \times 4 - (-2)^2 = 28 > 0$ •

نعم تقبل قيمة حدية و بما أن: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

فإن القيمة الحدية هي قيمة حدية صغرى (حد أدنى)

• نعين قيم (a,b) التي تعطي القيمة الحدية الدنيا (حد الأدنى) :

حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 : 4x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 : -2x + 8y - 8 = 0 \quad (\times 2) \end{cases}$$

بالجمع :

$$0 + 14y = 14$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$4x - 2 + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 0}$$

نعوض ونجد :

ومنه $W(0,1)$ هي القيمة الحدية الصغرى (حد أدنى)

ومنه :

• $f(0,1) = 2(0)^2 + 4(1)^2 - 2(0)(1) + 2(0) - 8(1) - 1$

$$= -5$$

$$\boxed{f(0,1) = -5}$$

#

مثال 2 :

$$f(x,y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 - 6x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

● الشرط الضروري :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2y} \end{cases}$$

نعوض نتيجة $\boxed{x=2y}$ في المعادلة $\frac{\partial f}{\partial x}$ ونجد :

$$16y - y - 3(4y^2) = 0$$

$$15y - 12y^2 = 0 \Rightarrow y(15 - 12y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{أو} \\ 15 - 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

- $y = 0 \Rightarrow x = 2(0) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0$ ○

- $y = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 2(\frac{5}{4}) \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow z = \frac{1175}{64}$$ ○

- النقطة الأولى $(0,0)$ من أجل f لدينا: $x = 0, y = 0$

$$= \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = (8)(2) - (-1)^2 = 15 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

- من أجل $x = \frac{5}{2}, y = \frac{5}{4}$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)\right)^2 =$$

(5)

$$= \left(8 - 6\left(\frac{5}{2}\right)\right) \times (2) - (-1)^2 =$$

$$(-7) \times (2) - (-1)^2$$

$$\boxed{\alpha = -15}$$

بما أن:

$\alpha < 0$

إذن: $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ ليست قيمة حدية

لكنها تمثل ذروة لبيانات الدالة.

#