الفصل الثاني : المصفوفات .

• تعريف المصفوفة : ليكن الحقل $\mathbb{R}$. n ، m عددان طبيعيان

لنأخذ المقادير السلمية (الأعداد الحقيقية) a_{ij} من الحقل $\mathbb{R}$ حيث :

$i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$

نسمي مصفوفة ، الجدول التالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

تدعى مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول i سطرا ومجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني j عمودا ونقول عندئذ أن المصفوفة ذات m سطرا و n عمودا وأبعادها من الرتبة $m \times n$.

ملاحظة :

- العنصر a_{ij} يقع في السطر i والعمود j .
- نرمز عادة لهذه المصفوفة بـ $A = (a_{ij})$
- ونرمز لمجموعة المصفوفات ذات m سطرا و n عمودا بالرمز $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

أنواع المصفوفات :

① تساوي مصفوفتين : تساوي مصفوفتان ← $A=(a_{ij})$ ، $B=(b_{ij})$ إذا وفقط

إذا كانتا من نفس الرتبة (لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة) وكانت عناصرهما

$a_{ij}=b_{ij}$ كلّ i,j ($\forall i,j$)

② المصفوفة الصفرية :

هي التي جميع عناصرها معدومة أي : $\boxed{a_{ij}=0}$ ، $\boxed{\forall i,j}$

③ المصفوفة المربعة : هي التي يكون فيها عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة ($n=m$) وهنا نقول أنها من الرتبة n ونقول أنّ

$A \in M_n(\mathbb{R})$

ونسمّي a_{ii} أي a_{11} ، a_{22} ، ... ، a_{nn} بالقطر الرئيسي للمصفوفة.

ونسمّي مجموع مداخل المصفوفة الواقعة على القطر الرئيسي بأثر المصفوفة ونرمز له بـ $Tr(A)$

مثال: $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ ، القطر الرئيسي : $(2,-1,6)$

الأثر $= Tr(A) = 2-1+6 = \boxed{7}$

④ المصفوفة المثلثية العلوية : $A=(a_{ij})$ مثلثية علوية إذا تحقق مايلي : ① A مربعة

② إذا كانت جميع العناصر التي تحت القطر الرئيسي معدومة.

($\forall i>j$; $a_{ij}=0$)

$A \in M_4(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

⑤ المصفوفة المثلثية السفلية : $A=(a_{ij})$ مثلثية سفلية إذا تحقق

ما يلي : ① A مربعة

② إذا كانت جميع العناصر التي فوق القطر الرئيسي معدومة ،

$(\forall i<j ;\ a_{ij}=0)$

مثال : $A \in M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

⑥ المصفوفة القطرية : إذا كانت جميع عناصرها معدومة ماعدا عناصر

القطر الرئيسي ليست كلها معدومة ،

$(\forall i \neq j ;\ a_{ij}=0 ,\ \exists i ; a_{ii} \neq 0)$

مثال : $A \in M_4(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⑦ مصفوفة الوحدة : إذا كانت المصفوفة قطرية

: في المصفوفة القطرية $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=1$

ويرمز لها بـ I_n .

⑧ المصفوفة المتناظرة: أو التناظرية هي المصفوفة المربعة التي تكون عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية أي

$$(\forall i,j \; ; \; a_{ij} = a_{ji})$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow (a_{ij})$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow (a_{ji})$$

(المنقول لـ A)

ومنه A مصفوفة متناظرة.

• المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي:

ليكن E, F فضاءان على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ~~$\mathbb{R}$~~ بعدين منتهيين

$\dim F = m$ ، $\dim E = n$ ، وليكن:

$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا في E

$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ أساسا في F

- نظرية:

ليكن f تطبيقا خطيا من E نحو F على النحو التالي:

$$f: E \longrightarrow F$$

$$\boxed{f(u_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{mj} v_m}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$

a_{ij} ← الدليل الأول (متغير)
↓
الثاني (ثابت)

$$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m \quad (j=1)$$

$$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{m2}v_m \quad (j=2)$$

$$\vdots$$

$$f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m \quad (j=n)$$

نسمّي المصفوفة (أو هذا الجدول)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(العمود الـ j : إحداثيات $f(u_j)$)

بالمصفوفة الموافقة للتطبيق الخطي (أو الملحقة بالتطبيق الخطي) f بالنسبة للأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ ونرمز لها بـ (a_{ij}) ذات n سطرا و m عمودا.

- ونقول أيضا أن f هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A

ملاحظة:

- عدد الأعمدة = $\dim E$ وعدد الأسطر = $\dim F$

مثلا: إذا كان التطبيق الخطي معرفا من $\mathbb{R}^4$ نحو $\mathbb{R}^2$ فإن المصفوفة المرافقة له تكون ذات أربع أعمدة وسطرين.

- البحث عن المصفوفة A الملحقة بالتطبيق الخطي f:

مثال 1:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

عمودان — 3 أسطر

$$f(x,y) = (2x-3y, -x+2y, x+y)$$

عيّن المصفوفة A الملاحقة بـ f .

← الجواب:

A ذات 3 أسطر وعمودين. (1)

وفق الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$:

$$U = \{u_1=(1,0), u_2=(0,1)\}$$

والأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$: (3)

$$V = \{v_1=(1,0,0), v_2=(0,1,0), v_3=(0,0,1)\}$$

لدينا: (2)

$$A = \begin{bmatrix} f(u_1) & f(u_2) \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 \quad (1) \\ f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 \quad (2) \end{cases}$$

حيث (1) $= a_{11}(1,0,0) + a_{21}(\ ) + a_{31}(\ ) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ← عمود أول

(2) $= (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ ← عمود ثاني

(4) ≠ (6)

ونبحث عن عناصر المصفوفة A باستخدام عبارة f :

$$\Rightarrow f(u_1) = f(1,0) = (2(1)-3(0), -1+2(0), 1+0)$$

(5) $$f(u_1) = (2,-1,1) \leftarrow$$ العمود الأول

$$\Rightarrow f(u_2) = f(0,1) = (2(0)-3(1), -(0)+2(1), 0+1) = (-3,2,1) \leftarrow$$ عمود (2)

ومنه نعوض $f(u_1)$ في المعادلة ① :

$$(2,-1,1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$$

ومنه :

$$\begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{21} = -1 \\ a_{31} = 1 \end{cases}$$

أيضا نعوض $f(u_2)$ في ② :

$$(-3,2,1) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1)$$

ومنه :

$$\begin{cases} a_{12} = -3 \\ a_{32} = 2 \\ a_{32} = 1 \end{cases}$$

إذن :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 أسطر = dim F
عمودان = dim E

#

مثال 2: ليكن: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي.

(ثلاثية) 3 — (ثنائية)

$$f(x,y,z) = (2x - 3z \mid x + y - 2z)$$

عين المصفوفة A الملحقة بـ f.

الجواب: ليكن

$\mathbb{R}^3$ لـ (الأساس القانوني) الأساسا $\mathcal{U} = \{u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (0,1,0),\ u_3 = (0,0,1)\}$

$\mathbb{R}^2$ لـ (الأساس القانوني) الأساسا $V = \{v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)\}$ (3) :ح

ولدينا: (ذات سطرين و 3 أعمدة) $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ (1)

$$A = \begin{bmatrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$ (2)

$f(u_1)$ هي التي تمثل أعمدة A، $f(u_3)$، $f(u_2)$

لدينا: (العمود الأول) (a_{11}, a_{21}) (4) مركبات $f(u_1)$

$f(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2$ ($v_1 = (1,0)$، $v_2 = (0,1)$)

$f(u_1) = f(1,0,0) = (2(1) - 3(0),\ 1 + 0 - 2(0)) = (2,1)$ (5) :ح

إذن:

$$(a_{11}, a_{21}) = (2,1)$$

و: (العمود الثاني):

$$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 = (a_{12}, a_{22}) \quad (4)'$$

ل:

$$f(u_2) = f(0,1,0) = (2(0) - 3(0), 0 + 1 \cdot 2(0))$$

$$= (0,1)$$

إذن:

$$(a_{12}, a_{22}) = (0,1) \quad (5)'$$

و: (العمود الثالث):

$$f(u_3) = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 = (a_{13}, a_{23}) \quad (4)''$$

ل:

$$f(u_3) = f(0,0,1) = (2(0) - 3(1), 0 + 0 - 2(1))$$

$$= (-3,-2) \quad (5)''$$

إذن:

$$(a_{13}, a_{23}) = (-3,-2)$$

ومنه في الأخير نجد:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

#

• الحالة العكسية: لدينا المصفوفة A معلومة.

المطلوب: التطبيق الخطي f المرفق لـ A.

مثال 1:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

المطلوب: التطبيق الخطي f المرفق لـ A.

الجواب:

ليكن ① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ، $x \in$ المنطلق

$f(x,y) = ??$

لدينا: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ ③ $f(u_1)$ $f(u_2)$

② الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{R}^3$

$f(u_1) = 2v_1 - v_2 + 3v_3 = (2,-1,3)$

$f(u_2) = v_1 + 0v_2 + 2v_3 = (1,0,2)$

لدينا: من أجل الأساس القانوني $\{e_1, e_2\}$ لـ $\mathbb{R}^2$:

$(x,y) = (x,0)+(0,y) = x(1,0)+y(0,1)$ ③

$= x u_1 + y u_2$

$\Rightarrow f(x,y) = f(xu_1 + yu_2)$ ④

$= xf(u_1) + yf(u_2)$ ⑤ تطبيق خطي $\Leftarrow$ f بما أن

$= x(2,-1,3) + y(1,0,2)$ ⑥

ومنه:

$$f(x,y) = (2x, -x, 3x) + (y, 0, 2y)$$

$$\boxed{f(x,y) = (2x+y, -x, 3x+2y)} \quad (1)$$

$$\boxed{f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad f(x,y) = (\quad\quad)} \quad \#$$

مثال 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

عيّن التطبيق الخطي المعرّف بـ A:

(للطالب)

الجواب:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$f(x,y,3) = ??$

$$A = \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

لدينا:

- $f(u_1) = 3v_1 + 4v_2 + 0v_3 = (3, 4, 0)$
- $f(u_2) = 0v_1 - v_2 + 0v_3 = (0, -1, 0)$
- $f(u_3) = 2v_1 + 3v_2 + 2v_3 = (2, 3, 2)$

(2)

- $(x,y,z) = xu_1 + yu_2 + zu_3$ (3)

$\boxed{6}$:ومنه

$\Rightarrow f(x,y,z) = f(x u_1 + y u_2 + z u_3)$ (4)

$= x f(u_1) + y f(u_2) + z f(u_3)$ (5)

$= x(3,4,0) + y(0,-1,1) + z(2,3,2)$ (6)

$\boxed{f(x,y,z) = (3x+2z,\ 4x-y+3z,\ y+2z)}$ (7)

#

مصفوفة الانتقال: (مصفوفة العبور)

(Le passage)

ليكن

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

و

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

الهدف: مصفوفة الانتقال من الأساس U إلى الأساس V

الجواب: نكتب جميع أشعة V بدلالة أشعة U:

$j=1$ بالعمود نعوض

$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n$

$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n$

$\vdots$

$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n$

A هو مصفوفة العبور من الأساس U إلى الأساس V.

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال:

$$U = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$$

$$V = \{v_1 = (2,1), v_2 = (1,-1)\}$$

1) اكتب A مصفوفة العبور من الأساس U إلى الأساس V

2) " B " " " " " V " U

الجواب:

1)

$$A = \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \end{matrix}$$

$$v_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \quad \text{---} (1)$$

$$v_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 \quad \text{---} (2)$$

من (1):

$$(2,1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (a_{11}, a_{21})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \end{cases}$$

من (2):

$$(1,-1) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1) = (a_{12}, a_{22})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = b_{11} v_1 + b_{21} v_2 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$u_2 = b_{12} v_1 + b_{22} v_2 \quad \text{——} \quad (2)$$

$(1,0) = b_{11}(2,1) + b_{21}(1,-1) = (2b_{11} + b_{21}, b_{11} - b_{21})$: (1) in

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b_{11} + b_{21} = 1 \Rightarrow 3b_{11} = 1 \Rightarrow b_{11} = \frac{1}{3} \\ b_{11} - b_{21} = 0 \Rightarrow b_{11} = b_{21} \end{cases} \quad = b_{21}$$

$(0,1) = b_{12}(2,1) + b_{22}(1,-1) = (2b_{12} + b_{22}, b_{12} - b_{22})$: (2) in

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b_{12} + b_{22} = 0 \Rightarrow b_{22} = -2b_{12} \\ b_{12} - b_{22} = 1 \Rightarrow 3b_{12} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_{12} = \frac{1}{3}$$

ومنه :

$$b_{22} = -\frac{2}{3}$$

إذن :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

عمليات على المصفوفات :

1) جمع مصفوفتين : لتكن المصفوفتان $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ من نفس الدرجة ، فإن مصفوفة المجموع $(A+B)$ مكونة من العناصر c_{ij} حيث :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad ، \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & +4 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 9\\ 4 & 13 & 4\\ 7 & -7 & -7\end{pmatrix}$$

ملاحظة : $B+A=A+B$

2) جداء مصفوفة في سلّمي : (عدد حقيقي)

لتكن $A=(a_{ij})$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$ فإنّ :

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})$$

(نضرب λ في جميع عناصر المصفوفة)

مثال :

أحسب ① $-A$ ② $2A$ حيث $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$

$$-A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -5\\ 2 & -1 & -3\\ -4 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$2A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 10\\ -4 & 2 & 6\\ 8 & 6 & 4\end{pmatrix}$$