للحذاءات : تمهيد : $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة A_{ij} رمز ال

المصفوفة الناتجة من A وذلك بحذف السطر i والعمود j

مثال 1 : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ، اكتب $A_{11}, A_{21}, A_{12}, A_{22}$.

$A_{11}=a_{22}$ | $A_{21}=a_{12}$ | $A_{12}=a_{21}$ | $A_{22}=a_{11}$

مثال 2 : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

اكتب A_{11} ، A_{21} ، A_{31} ، A_{22} ، A_{13}

$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ، $A_{21}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ، $A_{31}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$A_{22}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ ، $A_{13}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ ،

- نرمز إلى محدد A بـ: $\det A = |A|$

في حالة $A = (a_{11})$ فإن $\det A = a_{11}$

- في حالة $A = (a_{ij})$ مربعة في $M_n(\mathbb{K})$ هناك طريقتين لحساب $\det A$:

(1) نثبت العمود j:

$$\det A = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

(2) نثبت السطر i:

$$\det A = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

مثال:

$M_2(\mathbb{K})$ في $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

أحسب $\det A$

الجواب: نثبت j:

$$\det A = \sum_{k=1}^{k=2} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \quad , \quad 1 \leq j \leq 2$$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det M_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{k=2} (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (2 \times 4) - (3 \times (-1)) = 11$$

$M_3(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

الحالة ① : نثبت j حيث $1 \le j \le 3$ وليكن $j=1$

$$\det A = \sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{3+1} a_{31} \det A_{31}$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

مثال:

$\det A$ حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

نثبت j حيث $1 \le j \le 3$

$$\det A = \sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

حالة ①: نختار $j=1$ (العمود الأول)

$$\det A = \sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2) - 3(-12) + 5(-8)$$

$$= -6$$

حالة ②: نختار $j=2$ العمود الثاني

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -6$$

(1) إذا كان إحدى أعمدة A معدوم فإن $\det A = 0$

(2) " " صفوف في A متساوية فإن $\det A = 0$

(3) إذا كان في إحدى الأعمدة في A عبارة خطية للأعمدة الأخرى فإن $\det A = 0$

(4) إذا كانت مثلثية (علوية أو سفلية) فإن

حداء القطر الرئيسي $= \det A$

(5) $\det(A.B) = \det A . \det B$

جواب التمرين

$\det A = 0$ لأن العمود الثاني معدوم .

$\det B = 0$ لأن العمود الأول = العمود الثالث .

$\det C = 0$ " " الثالث هو ضعف الأول .

$\det D = (1)(-4)(3)$ لأن D مثلثية سفلية .
$= -12$

$\det E = 1 \times 5 \times 4 = 20$ " E " علوية .

$\det(DE) = \det D \times \det E = (-12) \times 20$
$= -240$

• مقلوب مصفوفة (المصفوفة العكسية):

نرمز لـ مقلوب المصفوفة A بـ A^{-1}

لتكن A مصفوفة مربعة من $M_n(\mathbb{R})$، نقول أن A تقبل مصفوفة عكسية A^{-1} (أو A قابلة للقلب)، إذا وُجدت مصفوفة B من $M_n(\mathbb{R})$ بحيث: $A.B = B.A = I_n$ ونكتب $B = A^{-1}$

• البحث عن A^{-1}:

~~① $\det A \neq 0$ ② $\det A = 0$ خاطئة A^{-1} غير موجودة~~

① A قابلة للقلب $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ ($\det A = 0$ خاطئة A^{-1} غير موجودة)

A^{-1} معرفة كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^t$$

حيث $C = (c_{ij})$ هي مصفوفة قادجة من A حيث:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

مثال 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2\times 6 - 4\times 3 = 0$$

إذن: A^{-1} غير موجودة.

مثال 2:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ، حسب A مقلوب المصفوفة A:

- $\det A = 2\times 3 - 4\times 1 = \boxed{2}$

إذن A^{-1} موجودة:

- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^t$ ، $C = (c_{ij})$

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

← الشكل العام لـ C:

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ ، $c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det A_{11} = +\det(3) = \boxed{3}$

$1+2$

$c_{12} = (-1)^{3} \det A_{13} = -\det(4) = \boxed{-4}$

$(2+1)$

$c_{21} = (-1)^{3} \det A_{21} = -\det(1) = \boxed{-1}$

$c_{22} = (-1)^{2+2} \det A_{22} = +\det(2) = \boxed{2}$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$:3 مثال

$$\det A = |A| = 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 5(9-16) - 7(6-12) + 9(8-9) = -2$$

$\det A = -2$: ومنه A^{-1} يوجد

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t \quad / \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

$M_3(\mathbb{R})$ في $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$: حيث

$C_{11} = (-1)^2 \det A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 16 = -7$

~~$C_{12} = (-1)^3 \det A_{12} = - \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$~~

$C_{21} = (-1)^3 \det A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6$

$C_{31} = (-1)^4 \det A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$

$C_{12} = (-1)^3 \det A_{12} = - \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -(21 - 36) = 15$

$C_{22} = (-1)^4 \det A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 27 = -12$

$C_{32} = (-1)^5 \det A_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (20 - 21) = -1$

$C_{13} = (-1)^4 \det A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 27 = 1$

$C_{23} = (-1)^5 \det A_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(20 - 18) = -2$

$C_{33} = (-1)^6 \det A_{33} = + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$

28

$$C=\begin{pmatrix} -7 & 15 & 1 \\ 6 & -12 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{t}=\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 15 & -12 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 15 & -12 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 \neq 0$$

$$A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C^{t}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{t}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$