المحور الرابع: حل جملة المعادلات الخطية

نسمي جملة خطية ذات n معادلة و m مجهول كل جملة معادلة من الشكل:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

نسمي كل تجاوب $\vec{X}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ الذي يحقق جميع المعادلات السابقة بحل الجملة (S) وكما نسمي

$$b\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ بالطرف الثاني للجملة (S)

حالة خاصة: ① إذا كانت $n = m$ نسمي (S) جملة خطية مربعة

② إذا كان الطرف الثاني $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ في (S) معدوما نسمي

جملة خطية متجانسة.

- الجملة المتكافئة: تكون جملتان متكافئتان إذا كان لهما نفس الحلول.

- كتابة مصفوفة الجملة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = b$$

A مصفوفة الجملة

مثال:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 5z = 2 \\ -x - 3y + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 1 \end{cases}$$

(44)

- كتابة المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* طريقة حل جملة خطية:

① طريقة كرامر: Cramer:

تقال الجملة لكرامر إذا كانت:

$m = n = r$

عدد المجاهيل = عدد المعادلات = رتبة المصفوفة

دستور كرامر: نرمز بـ A_j المصفوفة المتحصل عليها بـ A وذلك بتعويض العمود j بالشعاع b:

الحل الوحيد $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ للجملة (S) يحقق:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

حيث $\det A \neq 0$

مثال: حل الجملة الآتية بطريقة كرامر:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x + 6y = -2 \end{cases}$$

مصفوفة الجملة: A

حيث: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\det A = 2 \times 6 - (3 \times 5) = \boxed{-3}$$

$$x = x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{(3 \times 6) + (5 \times 2)}{-3}$$

$$= \boxed{\frac{-28}{3}}$$

$$y = x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4 - 9}{-3}$$

$$= \boxed{\frac{13}{3}}$$

حل الجملة: $(x, y) = \left(\frac{-28}{3}, \frac{13}{3}\right)$

④ طريقة جوص: Gauss

تعتمد على:

① نكتب جملة على الشكل المصفوفي:

② نجعل A مصفوفة مثلثية علوية

مثال: حل في $\mathbb{R}^3$ (باستعمال جوص):

$$\begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = -2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

جوجو باستعمال الطريقة

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow L_2 \times 2 + L_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow L_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightarrow (L_2 \times 2) - (L_3 \times 5) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+y-2z=0 \\ 5y-4z=-4 \\ 7z=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

الحل بالطريقة الثانية:

$$\Rightarrow z = \frac{-13}{7} \Rightarrow y = \frac{-4+4\left(\frac{-13}{7}\right)}{5} = \frac{-16}{7}$$

$$x = \frac{\frac{16}{7}+2\left(\frac{-13}{7}\right)}{-2} = \frac{5}{7}$$

مثال 2:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=7 \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=9 \\ x_1+2x_2+4x_3-x_4=6 \\ x_2-x_3+4x_4=4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ (L_2 \times 2 - L_1) \\ \\ L_3 \times 4 - L_1 \\ \\ \end{matrix}$$