الفصل الأول: حل مسألة البرمجة الخطية بإستعمال الطريقة الهندسية (الحل البياني)

أولا: تعريف البرمجة الخطية: هي أسلوب رياضي يعتمد عليه لإيجاد الحل الأمثل وذلك وفق خطوات محددة ومنه جاء مصطلح برمجة، أما مصطلح خطية نتج من كون القيود هي عبارة عن متباينات خطية.

وبما أن المؤسسة الاقتصادية تستعمل الموارد النادرة وفق مختلف الاستخدامات وذلك بهدف تحقيق أقصى ربح وهذا حسب المعادلة التالية:

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

من المفروض التطرق لفرضيات البرمجة الخطية قبل معرفة طريقة حلها وهي تمثل الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها من خلال البرمجة الخطية، وتتمثل فيما يلي:

- الخطية: أي وجود علاقة خطية بين المتغيرات في كل من دالة الهدف وكذلك القيود؛
- الإضافية: أي عدم وجود تداخل في إنتاج سلعتين على نفس الآلة، بل الوقت الإجمالي للنشاط هو الوقت الخاص بإنتاج السلعة الأولى زائد الوقت الخاص بإنتاج السلعة الثانية وهكذا؛
- القابلية للضرب والقسمة: أي هناك إمكانية الحساب من خلال الطريقة الثلاثية لكميات الإنتاج أو المواد الأولية اللتان تجمعها علاقة طردية، وأنه توجد علاقة طردية بين المدخلات والمخرجات في دالة الهدف؛

- الأرقام الحقيقية: أي أنه يمكن الاعتماد على الكسور بالإضافة إلى الأعداد الطبيعية، مع تجنب الاعتماد على الأعداد التي بها فواصل لأنها تكون بالتقريب فلا تخدم البحث على الحل الأمثل؛
- عدم السالبية: وذلك فيما يخص قيم المتغيرات لكي يكون هناك انسجام مع أن الكميات لا تكون سالبة؛

- التأكد: القيم العددية الموجودة في دالة الهدف والقيود معروفة ولا تتغير في فترة الدراسة.

ثانيا: الخطوات المتبعة لحل مسألة البرمجة الخطية

1- وضع صياغة البرمجة الخطية

1-1 تحديد طبيعة المشكلة؛

1-2 تحديد المتغيرات؛

1-3 تحديد دالة الهدف؛

1-4 تحديد القيود والتي تكون في شكل قيود خطية تعبر عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والإمكانيات المتاحة، وهناك ثلاثة أنواع وهي قيد فيه أصغر او يساوي من خلاله يتم تبين الحد الأعلى الذي لا يمكن تجاوزه وقيد فيه أكبر او يساوي من خلاله يتم تبين الحد الأدنى الذي يجب تحقيقه وقيد فيه يساوي وعن طريقه يتم تبين مثلا الموارد الذي يجب استخدامها كليا دون زيادة أو نقصان؛

1-5 التكوين النهائي للمشكلة.

2- حل صياغة البرمجة الخطية

2-1 تحديد منطقة الحلول الممكنة؛

2-1-1 تحويل المتراجحات إلى معادلات؛

2-1-2 رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل معادلة في معلم متعامد متجانس واحد؛

2-2 تحديد الحل الأمثل وذلك بالاعتماد على رؤوس المضلع.

ويمكن القول بأن الحل البياني يكون بالاعتماد على مستقيمات تقسم المستوي إلى نصفين أحدهما مقبول والأخر مرفوض، وعملية القبول تكون حسب الانسجام مع المتراجحة، وأخيرا تحديد قيمة النهاية العظمى أو الصغرى. والحل البياني يكون من خلال الخطوات التالية:

1* النموذج الرقمي للمشكلة الاقتصادية يكون في شكل متراجحات التي يتم تحويلها إلى معادلات مستقيمات، وكل مستقيم يتم رسمه بالاعتماد على جدول مساعد، وذلك لاستنتاج إحداثيات نقطتين من خلالهما يتم رسمه. وفي الأخير يكون لدينا مجموعة مستقيمات في نفس المستوي.

2* حسب الهندسة التحليلية فإن المستقيم يقسم المستوي إلى نصفين، أحدهما يتوافق مع المتراجحة، فحينها يتم تحديد إحداثيات نقطة بحيث لا تقع على المستقيم وتعوضهما في المتراجحة، فان تحققت فإن نصف المستوي الذي تقع فيه هذه النقطة هو المقبول، وإن لم تتحقق فان النصف الأخر هو المقبول.

3* للقيام بتحديد المنطقة المقبولة فإننا نقاطع بين كل أنصاف المستوي المقبولة، فتتحد منطقة مقبولة، والتي تكون إما مغلقة برؤوس محددة أو نصف مفتوحة بها رؤوس أو مفتوحة بدون رؤوس.

4* نعوض إحداثيات رؤوس المنطقة المقبولة في دالة الهدف، وذلك لتحديد قيمتها.

ثالثا: الحالات الخاصة في الحل البياني لمسألة البرمجة الخطية

ويمكن ذكر بعض الحالات الخاصة، وهي:

1- حالة الحلول المتعددة: وتكون لما يكون الرسم البياني لدالة الهدف ينطبق مع مستقيم معبر عن أحد القيود، فتكون كل نقاط القطعة المستقيمة المنتمية لهذا المستقيم وتنتمي في كذلك إلى منطقة الحلول الممكنة تمثل مجموعة حلول متعددة (غير منتهية) لهذا البرنامج.

2- حالة مسألة بدون منطقة حلول ممكنة: وتحدث هذه الحالة في حالة قيود البرنامج متضاربة.

3- حالة مسألة بدون حل ممكن: وتكون لما يمكن زيادة بعض المتغيرات إلى ما لا نهاية دون خرق أي قيد من قيود البرنامج، فتكون منطقة الحلول الممكنة غير محددة من جهة واحدة على الأقل، فيمكن حينها زيادة دالة الهدف في حالة التعظيم أو تخفيض دالة الهدف في حالة التقليل بدون حدود.

التمرين رقم 1:

هناك مصنع متخصص في إنتاج المكاتب والخزائن وقد قدر سعر بيع الخزانة الواحدة بـ 200 دج وتكلفة الوحدة الواحدة بـ 180 دج أما سعر بيع المكتب الواحد بـ 240 دج وتكلفته 190 دج. وبعد دراسة السوق وجد أن الحد الأقصى للطلب على الخزائن هو 3000 وحدة، والحد الأقصى للطلب على المكاتب هو 1750 وحدة وذلك في السنة الواحدة، مع وجود معلومات مؤكدة أن الطلب على المكاتب أقل أو يساوي 75 % من الطلب على الخزائن + 250، والحد الأقصى لإنتاج المصنع هو 4500 مكتب أو خزانة.

المطلوب:

تحديد عدد المكاتب والخزائن الذي يعطي أقصى ربح ممكن، وما هي قيمة هذا الربح؟

الحل:

وضع صياغة البرمجة الخطية

1: تحديد طبيعة المشكلة: المشكلة قيد الدراسة هو الوصول إلى أقصى ربح وذلك من خلال إنتاج وبيع المكاتب والخزائن.

2: تحديد المتغيرات

x_1: عدد الوحدات المنتجة والمباعة من الخزائن.

x_2: عدد الوحدات المنتجة والمباعة من المكاتب.

3: تحديد دالة الهدف

$$\Pi = \Pi_1 \times x_1 + \Pi_2 \times x_2$$

$$\Pi = (rt_1 - ct_1) \times x_1 + (rt_2 - ct_2) \times x_2$$

$$\Pi = (200 - 180) \times x_1 + (240 - 190) \times x_2$$

$$\Pi = 20 x_1 + 50 x_2$$

4: تحديد القيود

أولا: القيود التشغيلية

$$x_1 \leq 3000$$

$$x_2 \leq 1750$$

$$x_2 \leq \frac{3}{4} x_1 + 250$$

$$x_1 + x_2 \leq 4500$$

ثانيا: القيود المعبرة عن عدم السالبية

$$x_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

5: التكوين النهائي للمشكلة.

أوجد النهاية العظمى لدالة الربح $\Pi = 20 x_1 + 50 x_2$ وذلك بمراعاة القيود التالية:

$$x_1 \leq 3000$$

$$x_2 \leq 1750$$

$$x_2 \leq \frac{3}{4} x_1 + 250$$

$$x_1 + x_2 \leq 4500$$

$x_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

حل صياغة البرمجة الخطية

1- تحديد منطقة الحلول الممكنة

تحويل المتراجحات إلى معادلات ووضع الجدول المساعد

ملاحظة: لما تكون متغيرة واحدة تظهر في المعادلة فإن مهما تكن قيمة المتغيرة الغير ظاهرة فان قيمة المتغيرة الظاهرة هي قيمة الطرف الثاني. ولما تكون هناك متغيرتين ظاهرتان في المعادلة فإننا نضع مرة المتغيرة الأولى تساوي الصفر ونحدد قيمة المتغيرة الثانية فتتشكل لدينا إحداثيات النقطة الأولى وبعدها نضع المتغيرة الثانية تساوي الصفر ونحدد قيمة المتغيرة الأولى فتتشكل لدينا إحداثيات النقطة الثانية ومن خلال النقطتان نرسم المستقيم الخاص بهذه المعادلة.

(1) $x_1 = 3000$

x_1	3000	3000
x_2	0	1000

(2) $x_2 = 1750$

x_1	0	1000
x_2	1750	1750

(3) $x_2 = \frac{3}{4} x_1 + 250$

x_1	0	1000
x_2	250	1000

(4) $x_1 + x_2 = 4500$

x_1	0	4500
X_2	4500	0

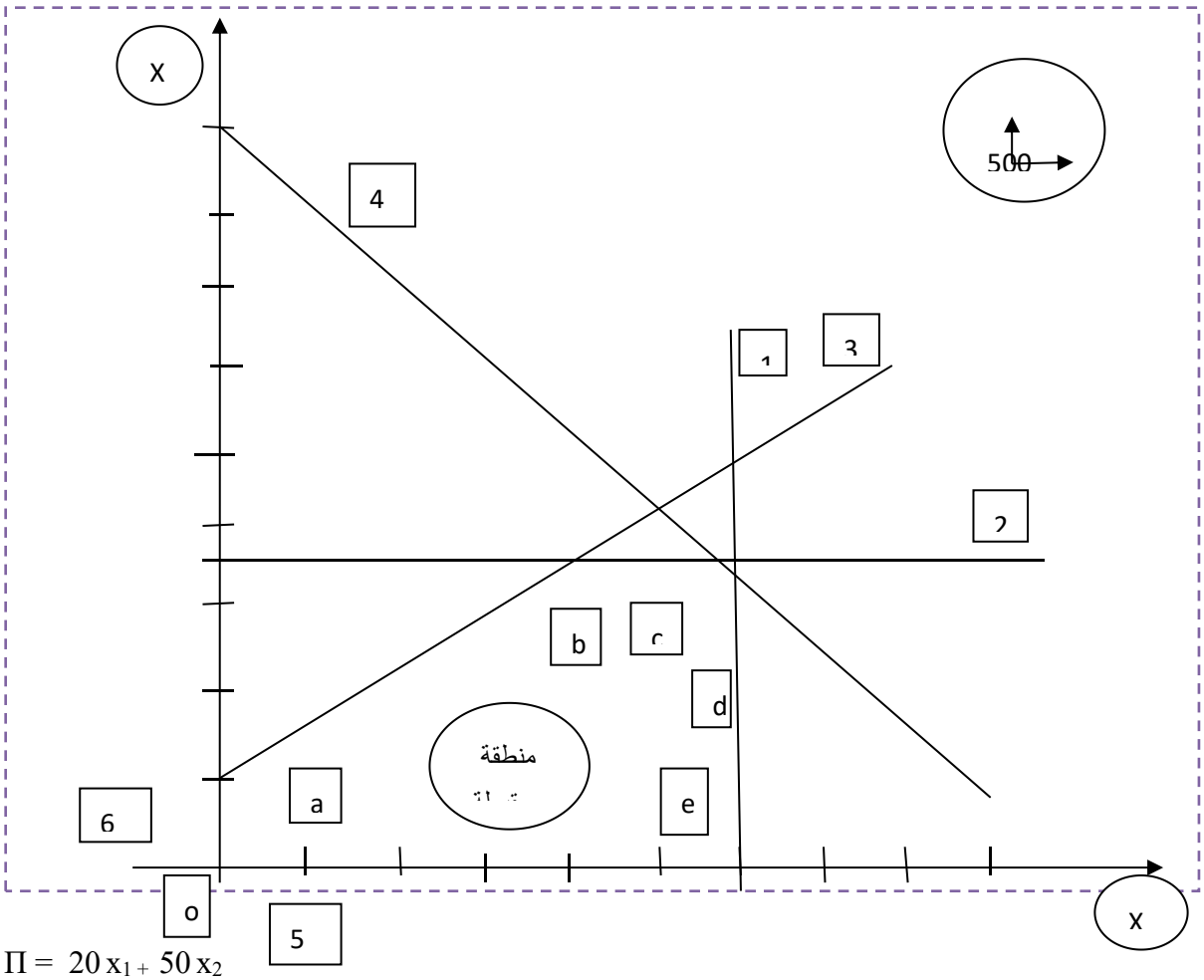
(5) $x_1 = 0$

x_1	0	0
X_2	0	1000

(6) $X_2 = 0$

x_1	0	1000
X_2	0	0

2 رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل المعادلات في معلم متعامد متجانس واحد



$\Pi = 20\,x_1 + 50\,x_2$

O (0, 0) Π= 0

a (0, 250) Π= 12500

b (2000, 1750) Π= 127500

c (2750, 1750) Π= 142500

d (3000, 1500) Π= 13500

e (3000, 0) Π= 60000

عند المقارنة c (2750, 1750) Π= 142500

نجد أن

هي التي تعطي أكبر ربح ومنه علينا أن ننتج ونبيع 2750 خزانة و1750 مكتب وذلك ما يمكن المؤسسة من تحقيق ربح قيمته 142500 دج.