جامعة باجي مختار-عنابة

كلية علوم الاقتصادية وعلوم التسيير

السنة الأولى ل. م . د

التاريـــــخ :2025 22 /05/

المـــــدة : ساعةونصف

امتحان السداسي الثاني - رياضيات 02

الأول :(13نقــطة):

$$f: R^3 \longrightarrow R^3$$

$$f(x,y,z) = (\ x+y+z\ ;-x+y\ ;2x+z\ )$$

1- ين ان f تطبيق خطي.

2-عين المصفوفة A المرفقة للتطبيق الخطي في الأساس القانوني.

3- عين القيم الذاتية ل A.

4- نعتبر الاساس : $\mathrm{v}=[v_3\{0,-1,0\}v_2\{1,0,-1\}\ v_1\{1,1,1\}\ ]$

عين مصفوفة العبور P من الاساس V الى الاساس القانوني ل R^3

5 – هل تقبل مصفوفة B عكسية B^{-1} : $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6-جد معامل x^9 في نشر $(x^3+2)^{11}$ وكذلك الحد الثابت في هذا النشر

التمرين الثاني (7 نقــاط) :

حل في R^3 الجملة الخطية الاتية باستعمال طريقة المصفوفة العكسية وطريقة اخرى:

$$\begin{cases} 3x-y+2z &= 9 \\ x-y+2z &= 8 \\ 2x-y-5z &= -1 \end{cases}$$

بالتوفيق للجميع

Scanné avec CamScanner

تصحيح فرض (2)

التمرين الأول:

$f(x,y,z) = (x+y+z\,;\, -x+y\,;\, 2x+z)$

1) * $f(u+v) = f(u) + f(v)$ (1)

$f(\alpha u) = \alpha f(u)$ (0,5)

2) تعيين المصفوفة A المرفقة بـ f: المصفوفة A هي أسطر وأعمدة $A \in M(R)_{3,3}$

$u = f(e_1) = f(1,0,0) = (1\,;-1\,;2)$ (0,5)

$v = f(e_2) = f(0,1,0) = (1\,;1\,;0)$ (0,5)

$w = f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0,1)$ (0,5)

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$ (0,5)

3) تعيين القيم الذاتية لـ A. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2\right] + 1\left[1-\lambda\right] + 2\left[-(1-\lambda)\right] = 0$$ (0,1)

$P(\lambda) = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 - 2\right] \Rightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$

$P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = 0$ (0,5) ، $\lambda = 1$ أو $\lambda = 0, 1, 2$ بالتبسيط

$\lambda \in \{0, 1, 2\}$ (0,5) قيم ذاتية

4) تعيين مصفوفة التبديل P من الأساس V إلى الأساس القانوني R^3 هو أي كتابة u بدلالة V.

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$u_1(1,0,0) = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$

$0 = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,-1) + \alpha_3(0,-1,0)$

$u_1(1,0,0) = (\alpha_1 + \alpha_2\,;\, \alpha_1 - \alpha_3\,;\, \alpha_1 - \alpha_2)$ (0,5) $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \rightarrow (1) \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \rightarrow (2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \rightarrow (3) \end{cases}$

بتعويض في (1) نجد: $2\alpha_1 = 1$ ومنه: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ (0,5)

Scanné avec CamScanner

$u_2(0,1,0) = \beta_1(1,1,1) + \beta_2(1,0,-1) + \beta_3(0,-1,0)$

$u_2(0,1,0) = (\beta_1+\beta_2 ; \beta_1-\beta_3 ; \beta_1-\beta_2)$ 0,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1+\beta_2=0 \to (1) \\ \beta_1-\beta_3=1 \to (2) \\ \beta_1-\beta_2=0 \to (3) \end{cases} \Rightarrow$ نجمع (3)+(1) نجد:

$2\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 = \beta_2$

نعوض في (2) نجد: $-\beta_3 = 1$ ومنه $\beta_3 = -1$ 0,5

$u_3(0,0,1) = \gamma_1(1,1,1) + \gamma_2(1,0,-1) + \gamma_3(0,-1,0)$

$u_3(0,0,1) = (\gamma_1+\gamma_2 ; \gamma_2-\gamma_3 ; \gamma_1-\gamma_2)$ 0,5

$\begin{cases} \gamma_1+\gamma_2=0 \to (1) \\ \gamma_1-\gamma_3=0 \to (2) \\ \gamma_1-\gamma_2=1 \to (3) \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_3 = -\gamma_2$

نعوض في (3) نجد: $-2\gamma_2 = 1$ 0,5

$\Rightarrow \gamma_2 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{2}$

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 0,5

5 نقبل P مصفوفة عكسية P^{-1} إذا تحقق: $\det(P) \neq 0$ 0,5

طريقة تصفير قوص:

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_1+2L_2 \\ L_3+L_4 \\ 3L_2+L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 & 16 \end{pmatrix}$$ 0,5

$\det(B) = 2\begin{vmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix} = 2\left(3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 10 & 16 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 16 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\right)$

$\det(B) = 2\left(3[32-70] - 5[112-130] + 5[49-26]\right) = 2\left(3(-38) - 5(-18) + 5(23)\right)$

$\det(B) = 2(-114+90+115) = 2(91) = 182 \neq 0$ 0,5

6 دستور ثنائي الحد: $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} \cdot b^p$

$(x^3+2)^{11} = \sum_{p=0}^{11} C_{11}^p (x^3)^{11-p} \cdot 2^p = \sum_{p=0}^{11} C_{11}^p \, x^{33-3p} \cdot 2^p$ 0,5

الحد الثابت معناه: $x^{33-3p} = x^0$

$33-3p=0 \Rightarrow p=11$ 0,5

الحد الثابت هو: $C_{11}^{11} 2^{11} = 2^{11}$ 0,5

معامل x^9 معناه: $x^{33-3p} = x^9$

$33-3p=9 \Rightarrow p=8$ 0,5

إذن معامل x^9 هو: $C_{11}^{8} \cdot 2^8$ 0,5

Scanné avec CamScanner

4 نقاط

تمرين رقم 2 حل الجملة الخطية في $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 3x-y+2z=9 \\ x-y+2z=8 \\ 2x-y-5z=-1 \end{cases} \quad A\vec{X}=b$$

$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&-1&2\\2&-1&-5\end{pmatrix}$ (0,25) $b=\begin{pmatrix}9\\8\\-1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$X=A^{-1}b$ (0,25) : طريقة المصفوفة المعكوسة -1

$\det(A)=3\begin{vmatrix}-1&2\\-1&-5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&2\\-1&-5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix}=3[5+2]-1[5+2]+2[0]=21-7=14\neq 0$ (0,5)

$A^{-1}=\frac{1}{\det}F^t$, $F_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, $F=\begin{pmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{13}\\F_{21}&F_{22}&F_{23}\\F_{31}&F_{32}&F_{33}\end{pmatrix}$

$F_{11}=+\begin{vmatrix}-1&2\\-1&-5\end{vmatrix}=(5+2)=7$

$F_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\2&-5\end{vmatrix}=-(-5-4)=9$

$F_{13}=+\begin{vmatrix}1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=(-1+2)=1$

$F_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\-1&-5\end{vmatrix}=-(5+2)=-7$

$F_{22}=+\begin{vmatrix}3&2\\2&-5\end{vmatrix}=(-15-4)=-19$

$F_{23}=-\begin{vmatrix}3&-1\\2&-1\end{vmatrix}=-(-3+2)=1$

$F_{31}=+\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix}=(-2+2)=0$

$F_{32}=-\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}=-(6-2)=-4$

$F_{33}=+\begin{vmatrix}3&-1\\1&-1\end{vmatrix}=(-3+1)=-2$ (0,75)

$F=\begin{pmatrix}7&9&1\\-7&-19&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $F^t=\begin{pmatrix}7&-7&0\\9&-19&-4\\1&1&-2\end{pmatrix}$ (0,25)

$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}7&-7&0\\9&-19&-4\\1&1&-2\end{pmatrix}$ (0,5)

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}7&-7&0\\9&-19&-4\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\8\\-1\end{pmatrix}$

$x=\frac{1}{14}[7\times9-7\times8+0(-1)]=\frac{1}{14}(63-56)=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$ (0,5)

$y=\frac{1}{14}[9\times9-19\times8-4(-1)]=\frac{1}{14}(81-152+4)=-\frac{67}{14}$ (0,5)

$z=\frac{1}{14}[1\times9+1\times8-2(-1)]=\frac{1}{14}(9+8+2)=\frac{19}{14}$ (0,5)

حل الجملة في $\mathbb{R}^3$: $X\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{67}{14}\\\frac{19}{14}\end{pmatrix}$

طريقة 2: كرامر

$x=\frac{\Delta x}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}9&-1&2\\8&-1&2\\-1&-1&-5\end{vmatrix}}{14}$ (0,5) $=\frac{9\times7-8(7)-1(0)}{14}=\frac{63-56-0}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$ (0,5)

$y=\frac{\Delta y}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}3&9&2\\1&8&2\\2&-1&-5\end{vmatrix}}{14}$ (0,5) $=\frac{3(-38)-(-43)+2(2)}{14}=\frac{-114+43+4}{14}=\frac{-67}{14}$ (0,5)

$z=\frac{\Delta z}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&9\\1&-1&8\\2&-1&-1\end{vmatrix}}{14}$ (0,5) $=\frac{3(9)-(10)+2}{14}=\frac{27-10+2}{14}=\frac{19}{14}$ (0,5)

$X\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{67}{14}\\\frac{19}{14}\end{pmatrix}$

انتهى

Scanné avec CamScanner

B) $= 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$2\left[1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right] + \left[1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right] + \left[1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right]$$

$$-3\left[1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right]$$

$$\det(B) = 2\left[-3 - 4(-2) + 2(6+5)\right] + \left[-3 - 4(-2) + 2(2+3)\right] + \left[-2 - (-4) + 2(-4)\right]$$

$$-3\left[11 - 5 + 4(-4)\right]$$

$$\det(B) = 2(27) + (+15) + [-8] - 3[-10]$$

$$= 54 + 15 - 8 + 30 = 91 \neq 0$$

2013

Scanné avec CamScanner