سلم التنقيط رياضيات -2-

التمرين الأول : I

1) $f(x)=(\ln x)^3 \Rightarrow f'(x)=3\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ (0,5)

2) $f'(x)=4\left(-\cos x+\sqrt{1-2x}-e^{-\frac{1}{2}x}-\dfrac{1}{x}\right)^3\left(\sin x-\dfrac{2}{2\sqrt{1-2x}}+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ (0,5)

3) $f(x)=\left(\left(e^{-\pi x}\right)^5\right)^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\left(e^{-\pi x}\right)^{\frac{5}{24}}=e^{-\frac{5}{24}\pi x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{5}{24}\pi e^{-\frac{5}{24}\pi x}$ (0,5)

4) $f(x)=\ln\left(3^x\cdot e^{-x}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{x(\ln 3-1)}\right)$ أو $=\dfrac{1}{2}\left[\ln 3^x+\ln e^{-x}\right]$

$f(x)=\dfrac{1}{2}\left[x\ln 3-x\right]\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}(\ln 3-1)$ (0,5)

II حساب المشتقات المتتابعة : $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

$f'(x)=\dfrac{-1}{x}$ (0,25) , $f^{(2)}(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (0,25) , $f^{(3)}(x)=\dfrac{-2}{x^3}$ (0,25) , $f^{(4)}(x)=\dfrac{6}{x^4}$ (0,25)

$\ldots\ldots f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ (1) $P(n)$

ونبرهن صحة $P(n)$ باستعمال البرهان بالتراجع

III

$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2-\ln x+1}{(\ln x-1)^2}=(u\circ v)(x)$

$u(x)=\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$ (0,5) $v(x)=\ln(x)\Rightarrow v'=\dfrac{1}{x}$ (0,5)

$u'=\dfrac{(2x-1)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-x+1)}{(x-1)^4}=\dfrac{-x^2+1}{(x-1)^4}$ (0,5)

$f'(x)=u'(v)v'=\dfrac{-(\ln x)^2+1}{(\ln x-1)^4}\cdot\dfrac{1}{x}$ (0,25) (0,25)

التمرين الثاني : حساب المشتقات الجزئية :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x-y-6+2x^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=3+4x$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-y-x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-1$

(0,25×6) 1,5

الشرط الضروري $AB - C^2 > 0 \Rightarrow -1(3+4x) - (-1) > 0$ ومنه

$-4x - 4x > 0$

$-x \cancel{>} -1 \Rightarrow 0{,}5 \quad \boxed{x < -1}$ الشرط اللازم

الشرط الكافي $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \longrightarrow (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \longrightarrow (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - y - 6 = 0 \rightarrow (1) \\ -y - x = 0 \rightarrow (2) \end{cases}$

من (2) نجد: $y = -x$ نعوض في (1) نجد:

$2x^2 + 3x + y - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0$

$\Delta = 64 \Rightarrow x_1 = \frac{-4-8}{2 \times 2} = -3 < -1$ 0,25 يحقق الشرط

$x_2 = \frac{-4+8}{4} = 1 > -3$ لا يحقق الشرط 0,25

$(-3, 3)$ فيه قصوى حلية 0,25

$t = 3 - 12 = -9 < 0$ لا توجد

التمرين الثاني

1) $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 2x + 1 + \frac{-2x+3}{x^2 - 5x + 6} dx$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 9x^2 + 5x + 9 & x^2 - 5x + 6 \\ \hline -2x^3 + 10x^2 - 12x & 2x + 1 \\ 0 \quad x^2 - 7x + 9 & \\ -x^2 + 5x - 6 & \\ 0 - 2x + 3 & \end{array}$$

0,5

$\frac{-2x+3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$

$\Delta > 0$

$(x-3)(x-2) = x^2 - 5x + 6$ 0,5

$\frac{-2x+3}{(x-3)(x-2)} = \frac{x(a+b) - 2a - 3b}{(x-3)(x-2)}$ بالمطابقة نجد:

$\begin{cases} a + b = -2 \quad \times(2) \\ -2a - 3b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +2a + 2b = -4 \\ -2a - 3b = 3 \end{cases}$

$-b = -1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

0,5 $\quad a = -3$

1) $\int 2x + 1 + \frac{-3}{x-3} + \frac{1}{x-2} dx = x^2 + x - 3\ln|x-3| + \ln|x-2| + C$ 0,5

$= x^2 + x - 3\ln|x-3| + \ln|x-2| + C$

4) $\int \frac{(x-2)^2}{x^3} dx = \int \frac{x^2}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{4}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} dx$ 0,5

$= \ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{4}{2x^2} + C$ 0,5

2) $\int (3x-2)\, e^{-3x}\, dx$ نحل بالتجزئة

$u = 3x-2$, $v' = e^{-3x}$

$u = 3x-2 \Rightarrow u' = 3$ و $v' = e^{-3x} \Rightarrow v = -\frac{1}{3} e^{-3x}$ 0,25 0,25

$uv - \int u'v = (3x-2)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int 3\left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3x} dx$ 0,5

$= \left(-x+\frac{2}{3}\right)e^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + C$ 0,5

$= \left(-x+\frac{1}{3}\right)e^{-3x} + C$

3) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos x}}$, نوص $t = \cos x$ 0,5 بالاشتقاق

$dt = -\sin x\, dx$

$dx = \frac{dt}{-\cos x} = -\frac{dt}{\cos x}$ نعوض في التكامل نجد

$\int \frac{\sin x\,(-dt)}{\sqrt{t}\, \sin x} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} + C$ 0,5

$= -2\sqrt{\cos x} + C$ 0,5

5) $\int \sin x\, e^{-\cos x} dx = \int u' e^{u} = e^{u} = e^{-\cos x} + C$ (1) ط1

او نعوض

$t = -\cos x$

$dt = \sin x\, dx$

$dx = \frac{dt}{\sin x}$ نعوض في التكامل نجد

$\int \sin x\, e^{t} \frac{dt}{\sin x} = e^{t} + C = e^{-\cos x} + C$ ط2 (1)

التمرين الثالث

2) $y' = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = f(x)$ 0,25

$y = \int \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + e^{\frac{1}{x}} + C$ 0,25 0,5

يتبع اخلف الصفحة

1) $(1+x^2)y' = 2x y^2 \quad , \quad y' = \frac{dy}{dx}$

$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2x y^2$

01 جانفي 2010

$\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{1+x^2}dx$ (0,25) نكامل الطرفين =

$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$ (0,25)

$-\frac{1}{y} = \ln|1+x^2| + C$ (0,5)

$y = \frac{-1}{\ln|1+x^2 + C}$

4) $y'' + 5y' + 4y = 0$

$r^2 + 5r + 4 = 0$ (0,25)

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$

$r_1 = -1 \qquad r_2 = -4$ (0,25)

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$ (0,5)

3) $y'' - \sqrt{3}y' + 3y = 0$

$r^2 - \sqrt{3}y + 3 = 0$ (0,25)

$\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4(3) = -9$ (0,25)

$\Delta = 9i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3i$

$r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2} = \alpha + \beta i$ (0,25)

$y = \cos\beta x\, e^{\alpha x} + \sin\beta x\, e^{\alpha x}$ (0,25)

$y = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\, e^{3/2 x} + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\, e^{\frac{3}{2}x}$

سلم حفظ التمرين الأول $2+2+2+3 = 9$

التمرين الثاني $2+1,5+1,5+1+1 = 7$

التمرين الثالث $1 \times 4 = 4$